Aufgabe 39:

Beh.: Jede $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ einer formalen Sprache $\mathfrak{L}$ läßt sich in ein Ultraprodukt ihrer endlichen Substrukturen einbetten.

Bew.:

- Zunächst werden einige Begriffe geklärt:

(1) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ wird durch eine Menge E erzeugt.
$:\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} = \langle E \rangle := \bigcap \{\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle;\ E \subseteq B\}$.

(2) Eine Struktur $\mathfrak{A}$ heißt endlich erzeugt.
$:\Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} = \langle E \rangle$ für eine endliche Menge E.
E ist dabei im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

(3) $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ heißt Substruktur einer $\mathfrak{L}$-Struktur $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots \rangle$, falls $A \subseteq M$ und die nichtlogischen Zeichen von $\mathfrak{L}$ werden in $\mathfrak{A}$ durch die Einschränkungen der Interpretationen in $\mathfrak{M}$ interpretiert.

- Im nächsten Schritt wird das geeignete Ultraprodukt gefunden:

Das Ultraprodukt der Substrukturen hat folgende Form:

$$\mathfrak{N} = {\prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i}\Big/_{\mathfrak{F}}$$

für eine geeignete Indexmenge I und einen geeigneten Ultrafilter $\mathfrak{F}$.

Indexmenge:

Wähle $\quad \mathfrak{X} := \{\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{M};\quad \mathfrak{A} \text{ ist endlich erzeugt}\}$ als Indexmenge.

Ultrafilter:

Ein Filter $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{X}$ ist Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\mathfrak{X})$. Finde zunächst eine Menge $G \subseteq \mathfrak{P}(\mathfrak{X})$; zeige, dass G die endliche Durchschnitts-Eigenschaft (EDE) hat. Schließe anschließend damit auf die Existenz eines Ultrafilters $\mathfrak{F} \supseteq G$. Betrachte dazu:

(1) Sei $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{M}$ endlich erzeugt. Es gibt also endliches $E \subseteq M$ mit $\mathfrak{A} = \langle E \rangle$. Definiere damit:

$$\hat{\mathfrak{A}} := \{\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{M};\ \mathfrak{B} = \langle F \rangle \text{ und } F \supseteq E \text{ ist endlich}\} \subseteq \mathfrak{X}$$

$\hat{\mathfrak{A}}$ ist die Menge aller endlich erzeugten Strukturen, die oberhalb von $\mathfrak{A}$ liegen. Beachte: die Definition ist unabhängig von tatsächlich gewähltem E!

(2) Nun kann Menge G definiert werden, die zum Ultrafilter erweitert wird.

$$G := \{\hat{\mathfrak{A}};\ \mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{M} \text{ ist endlich erzeugt}\}$$

Zu zeigen ist, dass G tatsächlich EDE hat.

G hat EDE:

Zeige, dass G unter einfachem Schnitt abgeschlossen ist:

Für $i = 1, 2$ seien also $\hat{\mathfrak{A}}_i \in G$. $\Rightarrow \mathfrak{A}_i \leqslant \mathfrak{M}$ sind endlich erzeugt. $\Rightarrow$ Es gibt $E_i \subseteq M$ mit $\mathfrak{A}_i = \langle E_i \rangle$. Damit ist: $\hat{\mathfrak{A}}_i = \{\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{M};\ \mathfrak{B} = \langle F \rangle$ und $F \supseteq E_i$ ist endlich$\}$

$\Rightarrow$

$$\hat{\mathfrak{A}}_1 \cap \hat{\mathfrak{A}}_2 = \{\mathfrak{B} \leqslant \mathfrak{M};\ \mathfrak{B} = \langle F \rangle \text{ und } F \supseteq E_1 \cup E_2 \text{ ist endlich}\} = \hat{\mathfrak{A}} \in G$$

für $\mathfrak{A} = \langle E_1 \cup E_2 \rangle$ endlich erzeugt. Mit vollständiger Induktion folgt: G hat EDE.

Nach Tarski (Proposition 14.3) gibt es (mit Zorn geschlossen) einen Ultrafilter $\mathfrak{F} \supseteq G$ und das gesuchte Ultraprodukt ist damit:

$$\mathfrak{N} = {}^{\prod_{\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}} \mathfrak{A}}\!\big/_{\mathfrak{F}}$$

- Finde nun Einbettung $\Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$:

Kanonisch würde man erwarten, dass zur Einbettung die Elemente $m \in M$ auf die konstante Abbildung ${}^{\mathfrak{A} \mapsto m}\!/_{\mathfrak{F}}$ abgebildet werden. Dies geht hier nicht, da im Allgemeinen nicht für alle endlich erzeugten Substrukturen $\mathfrak{A}$ gilt: $m \in \mathfrak{A}$. Deshalb müssen fast-konstante Abbildungen gefunden werden:

(1) Wähle zunächst (mit AC): $f : \mathfrak{X} \to \bigcup \mathfrak{X}$ mit $f(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{A}$.

(2) Zu jedem $m \in M$ definiere: $g_m : X \to \bigcup \mathfrak{X} : \mathfrak{A} \mapsto \begin{cases} m & \text{falls } m \in \mathfrak{A} \\ f(\mathfrak{A}) & \text{sonst} \end{cases}$

Für alle Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$ gilt $g_m(\mathfrak{A}) \in \mathfrak{A}$ und g_m ist tatsächlich die gesuchte fast-konstante Abbildung.

(3) Definiere nun die Einbettung: $\Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} : m \mapsto {}^{g_m}\!/_{\mathfrak{F}}$.

- Zeige, dass Φ Monomorphismus ist:

Injektivität:

Seien $m, l \in M$ mit $m \neq l$. Für $\mathfrak{A} = \langle m, l \rangle$ gilt: $g_m(\mathfrak{A}) = m \neq l = g_l(\mathfrak{A})$. Gleiches gilt auch für jedes $\mathfrak{B} \in \hat{\mathfrak{A}}$. Damit:

$$X := \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{X};\ g_m(\mathfrak{A}) \neq g_l(\mathfrak{A})\} \supseteq \hat{\mathfrak{A}} \in G \subseteq \mathfrak{F} \ \Rightarrow\ X \in F$$

Damit ist aber gezeigt: ${}^{g_m}\!/_{\mathfrak{F}} \neq {}^{g_l}\!/_{\mathfrak{F}}$ und Φ ist injektiv.

Φ *strukturerhaltend*:

Zu zeigen ist, dass Φ die Struktur von $\mathfrak{M}$ – das sind die Interpretationen der nichtlogischen Zeichen von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{M}$ – in der Bildmenge $\mathfrak{N}$ erhält; dafür müssen insbesondere die Interpretation der Zeichen in reduzierten Produkten bekannt sein (vgl. Definition in §15).

Zur Notation: für ein Zeichen $\dot{\xi}$ der formalen Sprache wird die Interpretation in der Struktur $\mathfrak{M}$ durch $\xi^{\mathfrak{M}}$ notiert.

(1) *Individuenkonstanten*: Sei $\dot{m}$ Individuen-Konstante der Sprache $\mathfrak{L}$.

Zu zeigen ist: $\Phi(m^{\mathfrak{M}}) = m^{\mathfrak{N}}$

In jeder Substruktur $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle \leqslant \mathfrak{M}$ gilt: $m^{\mathfrak{M}} = m \in A$ und $m^{\mathfrak{A}} = m$. Damit ist $m^{\mathfrak{N}} = {}^{g}\!/_{\mathfrak{F}}$ mit $g(\mathfrak{A}) = m$ für jedes $\mathfrak{A} \in \mathfrak{X}$. Also $g = g_m$ und $\Phi(m^{\mathfrak{M}}) = m^{\mathfrak{N}}$.

(2) *Relationszeichen*: Sei $\dot{R}$ ein n-stelliges Relationszeichen der Sprache $\mathfrak{L}$.

Zu zeigen ist: $\vec{m} = \langle m_1, \ldots m_n \rangle \in R^{\mathfrak{M}}$
$\Rightarrow \quad \Phi(\vec{m}) = \langle \Phi(m_1), \ldots \Phi(m_n) \rangle = \langle {}^{g_{m_1}}\!/_{\mathfrak{F}}, \ldots {}^{g_{m_n}}\!/_{\mathfrak{F}} \rangle \in R^{\mathfrak{N}}$

Es gilt mit $\mathfrak{A} = \langle m_1, \ldots m_n \rangle$:

$$X := \{\mathfrak{A} \in \mathfrak{X};\ \langle g_{m_1}(\mathfrak{A}), \ldots g_{m_n}(\mathfrak{A}) \rangle \in R^{\mathfrak{A}}\} \supseteq \hat{\mathfrak{A}} \in G \subseteq \mathfrak{F} \ \Rightarrow \ X \in \mathfrak{F}$$

Damit also:

$$\Phi(\vec{m}) = \langle {}^{g_{m_1}}\!/_{\mathfrak{F}}, \ldots {}^{g_{m_n}}\!/_{\mathfrak{F}} \rangle \in R^{\mathfrak{N}}$$

(3) *Funktionszeichen*: Für n-stellige Funktionszeichen $\dot{f}$ verläuft die Argumentation trotz kleiner Modifikationen analog zu den Relationszeichen.

- Damit wurde geeignetes Ultraprodukt und darin eine Einbettung von $\mathfrak{M}$ gefunden. Somit ist die Behauptung gezeigt. Q.E.D.