

Kombinatorik und Diskrete Mathematik - bedeutende offene Probleme

Michael Huber

Mathematisches Institut
Universität Tübingen

Antrittsvorlesung

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?

Überblick

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien

Überblick

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien
- 3 Erdős-Probleme: Kombinatorische Zahlentheorie

Überblick

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien
- 3 Erdős-Probleme: Kombinatorische Zahlentheorie
- 4 Real World Application: Fahrplan-Optimierung

Überblick

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien
- 3 Erdős-Probleme: Kombinatorische Zahlentheorie
- 4 Real World Application: Fahrplan-Optimierung

Das 'P versus NP'-Problem

- eines der sieben Millenniumsprobleme des Clay Mathematics Institute

Das 'P versus NP'-Problem

- eines der sieben Millenniumsprobleme des Clay Mathematics Institute
- "A gift to Mathematics from Computer Science" (Steve Smale)

Das 'P versus NP'-Problem

- eines der sieben Millenniumsprobleme des Clay Mathematics Institute
- "A gift to Mathematics from Computer Science" (Steve Smale)

Beispiel: F. N. Cole (1903)

$$2^{67} - 1 = 147573952589676412927$$

Das 'P versus NP'-Problem

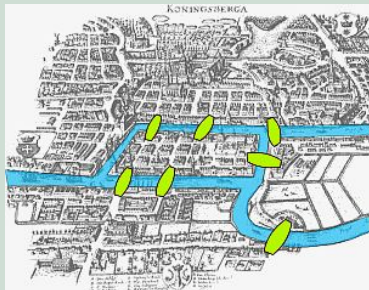
- eines der sieben Millenniumsprobleme des Clay Mathematics Institute
- "A gift to Mathematics from Computer Science" (Steve Smale)

Beispiel: F. N. Cole (1903)

$$\begin{aligned}2^{67} - 1 &= 147573952589676412927 \\ &= 193707721 \cdot 761838257287\end{aligned}$$

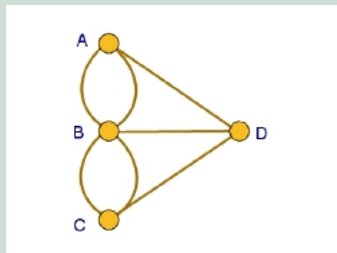
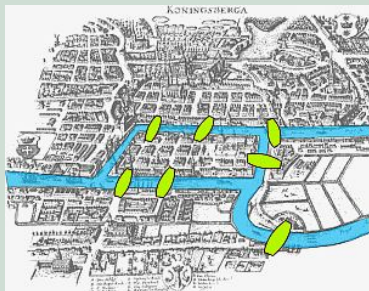
Das 'P versus NP'-Problem

Beispiel: "Königsberger Brückenproblem"



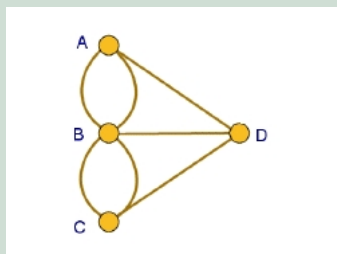
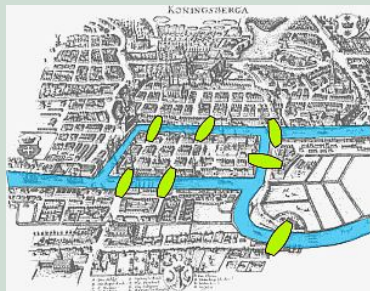
Das 'P versus NP'-Problem

Beispiel: "Königsberger Brückenproblem"



Das 'P versus NP'-Problem

Beispiel: "Königsberger Brückenproblem"

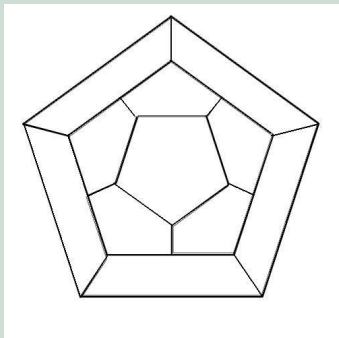


Gegeben: Graph $G = (E, K)$

Frage: Besitzt G einen Eulerschen Kantenzug?

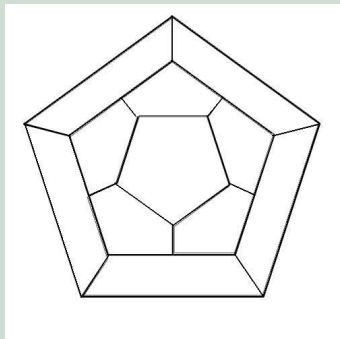
Das 'P versus NP'-Problem

Beispiel: Hamiltons Dodekaeder-Graph



Das 'P versus NP'-Problem

Beispiel: Hamiltons Dodekaeder-Graph

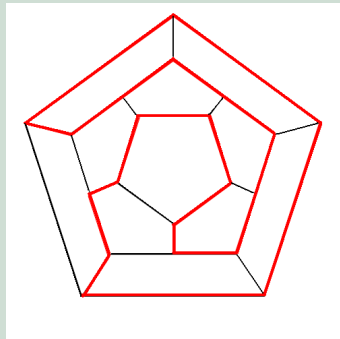
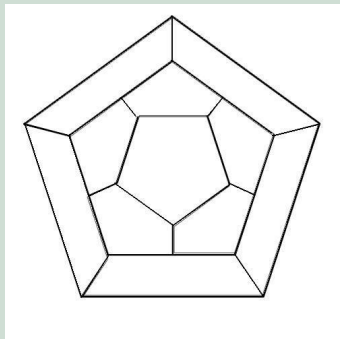


Gegeben: Graph $G = (E, K)$

Frage: Besitzt G einen Hamiltonischen Kreis?

Das 'P versus NP'-Problem

Beispiel: Hamiltons Dodekaeder-Graph



Gegeben: Graph $G = (E, K)$

Frage: Besitzt G einen Hamiltonischen Kreis?

Das 'P versus NP'-Problem

Offenes Problem

Gilt $P = NP$?

Das 'P versus NP'-Problem

Offenes Problem

Gilt $P = NP$?

Bemerkungen:

- 1 $P = NP$: gute Seite

Das 'P versus NP'-Problem

Offenes Problem

Gilt $P = NP$?

Bemerkungen:

- 1 $P = NP$: gute Seite
- 2 $P = NP$ (konstruktiver Beweis): schlechte Seite

Das 'P versus NP'-Problem

Offenes Problem

Gilt $P = NP$?

Bemerkungen:

- 1 $P = NP$: gute Seite
- 2 $P = NP$ (konstruktiver Beweis): schlechte Seite
- 3 unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre

Das 'P versus NP'-Problem

Offenes Problem

Gilt $P = NP$?

Bemerkungen:

- 1 $P = NP$: gute Seite
- 2 $P = NP$ (konstruktiver Beweis): schlechte Seite
- 3 unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre

Vermutung

Es gilt: $P \neq NP$.

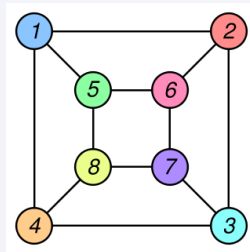
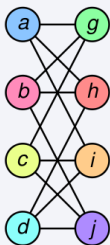
Das Graphen-Isomorphie Problem

Definition

Zwei Graphen $G_1 = (E_1, K_1)$ und $G_2 = (E_2, K_2)$ sind *isomorph*, wenn es eine bijektive Abbildung $f : E_1 \rightarrow E_2$ gibt, sodass für alle $u, v \in E_1$ gilt:

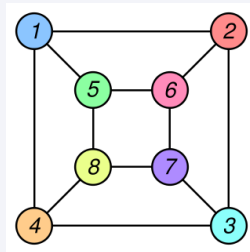
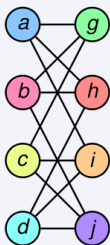
$$\{u, v\} \in K_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in K_2.$$

Das Graphen-Isomorphie Problem



Aufgabe: Sind diese beiden Graphen isomorph?

Das Graphen-Isomorphie Problem



Aufgabe: Sind diese beiden Graphen isomorph?

Antwort: Ja!

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 6, \quad f(c) = 8, \quad f(d) = 3,$$

$$f(g) = 5, \quad f(h) = 2, \quad f(i) = 4, \quad f(j) = 7.$$

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Problem liegt in NP, aber:

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Problem liegt in NP, aber:

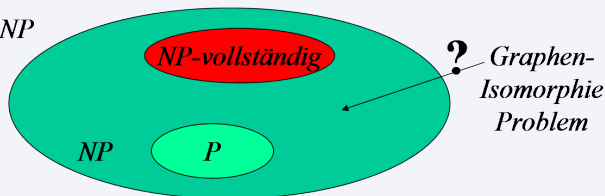
- kein Beweis der NP-Vollständigkeit bislang bekannt
- kein Algorithmus in polynomialer Zeit bislang bekannt

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Problem liegt in NP, aber:

- kein Beweis der NP-Vollständigkeit bislang bekannt
- kein Algorithmus in polynomialer Zeit bislang bekannt

Falls $P \neq NP$

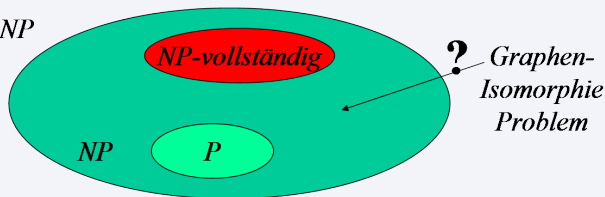


Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Problem liegt in NP, aber:

- kein Beweis der NP-Vollständigkeit bislang bekannt
- kein Algorithmus in polynomialer Zeit bislang bekannt

Falls $P \neq NP$



Offenes Problem

Gilt $GI \in NP \setminus (P \cup NP\text{-vollst})$?

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Bemerkungen:

- 1 spezielle Klassen gehen leichter:

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Bemerkungen:

① **spezielle Klassen gehen leichter:**

Algorithmen in polynomialer Zeit für:

- planare Graphen (Hopcroft/Wong 1974)
- Graphen mit beschränkter Valenz (Luks 1982)

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Bemerkungen:

① **spezielle Klassen gehen leichter:**

Algorithmen in polynomialer Zeit für:

- planare Graphen (Hopcroft/Wong 1974)
- Graphen mit beschränkter Valenz (Luks 1982)

② **"GI-Completeness":**

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Bemerkungen:

① **spezielle Klassen gehen leichter:**

Algorithmen in polynomialer Zeit für:

- planare Graphen (Hopcroft/Wong 1974)
- Graphen mit beschränkter Valenz (Luks 1982)

② **"GI-Completeness":**

Probleme sind **GI-complete**, falls sie "gleich schwierig" sind wie das GI-Problem:

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Bemerkungen:

① **spezielle Klassen gehen leichter:**

Algorithmen in polynomialer Zeit für:

- planare Graphen (Hopcroft/Wong 1974)
- Graphen mit beschränkter Valenz (Luks 1982)

② **"GI-Completeness":**

Probleme sind **GI-complete**, falls sie "gleich schwierig" sind wie das GI-Problem:

- Isomorphie regulärer Graphen
- Isomorphie bipartiter Graphen
- Isomorphie chordaler Graphen

Komplexität des Graphen-Isomorphie Problems

Bemerkungen:

① **spezielle Klassen gehen leichter:**

Algorithmen in polynomialer Zeit für:

- planare Graphen (Hopcroft/Wong 1974)
- Graphen mit beschränkter Valenz (Luks 1982)

② **"GI-Completeness":**

Probleme sind **GI-complete**, falls sie "gleich schwierig" sind wie das GI-Problem:

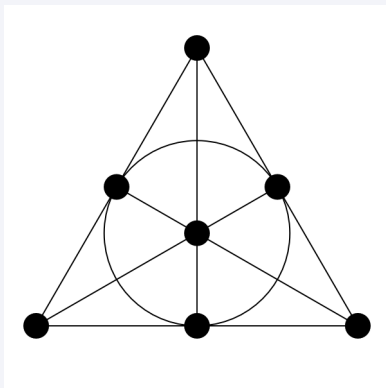
- Isomorphie regulärer Graphen
- Isomorphie bipartiter Graphen
- Isomorphie chordaler Graphen
- Isomorphie endlicher Algebren,
Isomorphie kombinatorischer Designs, u.a.

Überblick

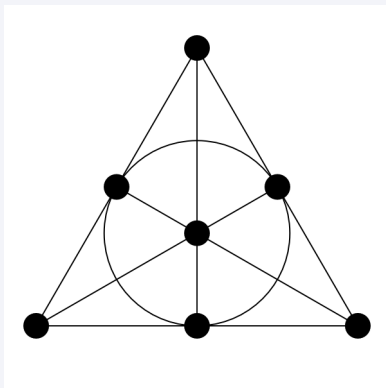
- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien**
- 3 Erdős-Probleme: Kombinatorische Zahlentheorie
- 4 Real World Application: Fahrplan-Optimierung

Die Welt der Fanoaner

Die Welt der Fanoaner

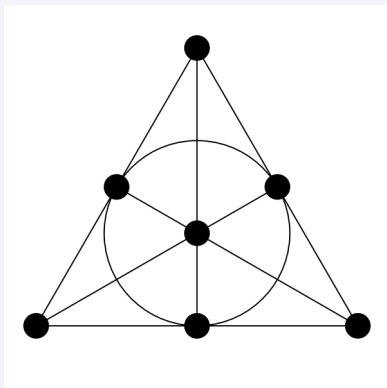


Die Welt der Fanoaner



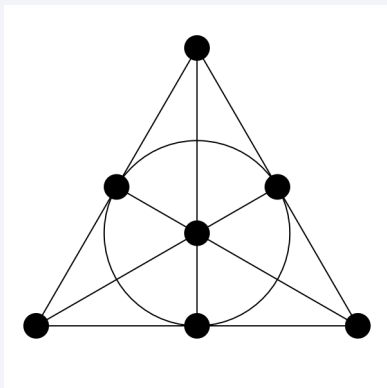
- je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade

Die Welt der Fanoaner



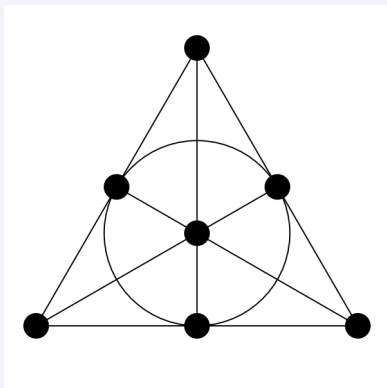
- je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade
- je zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt

Die Welt der Fanoaner



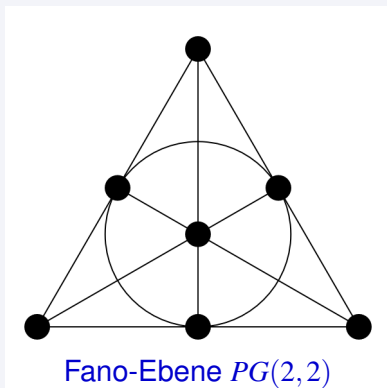
- je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade
- je zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt
- jede Gerade besitzt mindestens (genau) drei Punkte

Die Welt der Fanoaner



- je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade
- je zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt
- jede Gerade besitzt mindestens (genau) drei Punkte
- alle Punkte und alle Geraden sind gleich

Die Welt der Fanoaner



- je zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade
- je zwei Geraden haben genau einen Schnittpunkt
- jede Gerade besitzt mindestens (genau) drei Punkte
- alle Punkte und alle Geraden sind gleich

Kombinatorische Designs

Definition

Ein t - (v, k, λ) *Design* (kurz: *t-Design*) ist eine endliche Inzidenzstruktur mit einer Menge von Punkten, einer Menge von Blöcken und einer Inzidenzrelation, wenn gilt:

Kombinatorische Designs

Definition

Ein t - (v, k, λ) *Design* (kurz: *t-Design*) ist eine endliche Inzidenzstruktur mit einer Menge von Punkten, einer Menge von Blöcken und einer Inzidenzrelation, wenn gilt:

- (i) es gibt v Punkte
- (ii) jeder Block inzidiert mit k Punkten
- (iii) jede t -elementige Teilmenge der Punktmenge inzidiert mit λ Blöcken.

Kombinatorische Designs

Definition

Ein t - (v, k, λ) *Design* (kurz: *t-Design*) ist eine endliche Inzidenzstruktur mit einer Menge von Punkten, einer Menge von Blöcken und einer Inzidenzrelation, wenn gilt:

- (i) es gibt v Punkte
- (ii) jeder Block inzidiert mit k Punkten
- (iii) jede t -elementige Teilmenge der Punktmenge inzidiert mit λ Blöcken.

Falls $\lambda = 1$: *Steiner t-Design* (oder *Steinersystem*).

Kombinatorische Designs

Beispiel (A): Fano-Ebene $PG(2,2)$

Kombinatorische Designs

Beispiel (A): Fano-Ebene $PG(2,2)$

→ 2-(7,3,1) Design
(Steinertripelsystem der Ordnung 7)

Kombinatorische Designs

Beispiel (A): Fano-Ebene $PG(2,2)$

→ $2-(7,3,1)$ Design
(Steinertripelsystem der Ordnung 7)

Beispiel (B): Projektiver Raum $PG(d,q)$

Kombinatorische Designs

Beispiel (A): Fano-Ebene $PG(2,2)$

→ $2-(7,3,1)$ Design
(Steinertripelsystem der Ordnung 7)

Beispiel (B): Projektiver Raum $PG(d,q)$

Punkte: 1-dimensionale Unterräume von $V(d+1,q)$

Blöcke: 2-dimensionale Unterräume

Kombinatorische Designs

Beispiel (A): Fano-Ebene $PG(2,2)$

→ $2-(7,3,1)$ Design
(Steinertripelsystem der Ordnung 7)

Beispiel (B): Projektiver Raum $PG(d,q)$

Punkte: 1-dimensionale Unterräume von $V(d+1,q)$

Blöcke: 2-dimensionale Unterräume

→ $2-\left(\frac{q^{d+1}-1}{q-1}, q+1, 1\right)$ Design

Kombinatorische Designs

Beispiel (C): Affiner Raum $AG(d, q)$

Kombinatorische Designs

Beispiel (C): Affiner Raum $AG(d, q)$

Punkte: Punkte von $V(d, q)$

Blöcke: affine Geraden

Kombinatorische Designs

Beispiel (C): Affiner Raum $AG(d, q)$

Punkte: Punkte von $V(d, q)$

Blöcke: affine Geraden

→ $2-(q^d, q, 1)$ Design

Kombinatorische Designs

Beispiel (C): Affiner Raum $AG(d, q)$

Punkte: Punkte von $V(d, q)$

Blöcke: affine Geraden

→ $2-(q^d, q, 1)$ Design

Beispiel (D): Affiner Raum $AG(d, 2)$

Kombinatorische Designs

Beispiel (C): Affiner Raum $AG(d, q)$

Punkte: Punkte von $V(d, q)$

Blöcke: affine Geraden

→ $2-(q^d, q, 1)$ Design

Beispiel (D): Affiner Raum $AG(d, 2)$

Punkte: Punkte von $V(d, 2)$

Blöcke: affine Ebenen

Kombinatorische Designs

Beispiel (C): Affiner Raum $AG(d, q)$

Punkte: Punkte von $V(d, q)$

Blöcke: affine Geraden

→ $2-(q^d, q, 1)$ Design

Beispiel (D): Affiner Raum $AG(d, 2)$

Punkte: Punkte von $V(d, 2)$

Blöcke: affine Ebenen

→ $3-(2^d, 4, 1)$ Design
(Steinerquadrupelsystem der Ordnung 2^d)

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Definition

- eine *Fahne* von D : ein inzidentes Punkt-Block Paar

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Definition

- eine *Fahne* von D : ein inzidentes Punkt-Block Paar
- ein *Automorphismus* von D : ein Paar von Permutationen auf der Punktmenge und der Blockmenge, welches die Inzidenz erhält.

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Definition

- eine *Fahne* von D : ein inzidentestes Punkt-Block Paar
- ein *Automorphismus* von D : ein Paar von Permutationen auf der Punktmenge und der Blockmenge, welches die Inzidenz erhält.
- $G \leq \text{Aut}(D)$ heisst *fahnentransitiv*, falls G transitiv operiert auf den Fahnen von D .
Dann heisst D ebenso fahnentransitiv.

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Definition

- eine *Fahne* von D : ein inzidentes Punkt-Block Paar
- ein *Automorphismus* von D : ein Paar von Permutationen auf der Punktmenge und der Blockmenge, welches die Inzidenz erhält.
- $G \leq \text{Aut}(D)$ heisst *fahnentransitiv*, falls G transitiv operiert auf den Fahnen von D .

Dann heisst D ebenso fahnentransitiv.

Entsprechendes für *blocktransitiv*.

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Erbrachte Klassifikationen:

- $t = 2$: Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck, Saxl 1990

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Erbrachte Klassifikationen:

- $t = 2$: Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck, Saxl 1990
- $t \geq 7$: Cameron und Praeger 1993

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Erbrachte Klassifikationen:

- $t = 2$: Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck, Saxl 1990
- $t \geq 7$: Cameron und Praeger 1993
- $t = 3, 4, 5, 6$: blieben ca. 40 Jahre lang offen:

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Erbrachte Klassifikationen:

- $t = 2$: Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck, Saxl 1990
- $t \geq 7$: Cameron und Praeger 1993
- $t = 3, 4, 5, 6$: blieben ca. 40 Jahre lang offen:
 - Tits 1964, Buekenhout 1968

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Erbrachte Klassifikationen:

- $t = 2$: Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck, Saxl 1990
- $t \geq 7$: Cameron und Praeger 1993
- $t = 3, 4, 5, 6$: blieben ca. 40 Jahre lang offen:
 - Tits 1964, Buekenhout 1968
 - Lüneburg 1965: spezielle Klasse von fahnentransitiven Steinerquadrupelsystemen $3-(v, 4, 1)$

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Frage

Kennen wir alle fahnentransitiven Steiner t -Designs?

Erbrachte Klassifikationen:

- $t = 2$: Buekenhout, Delandtsheer, Doyen, Kleidman, Liebeck, Saxl 1990
- $t \geq 7$: Cameron und Praeger 1993
- $t = 3, 4, 5, 6$: blieben ca. 40 Jahre lang offen:
 - Tits 1964, Buekenhout 1968
 - Lüneburg 1965: spezielle Klasse von fahnentransitiven Steinerquadrupelsystemen $3-(v, 4, 1)$
 - H. 2005/06: Lösung aller vier Fälle.

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

Sei D ein nicht-triviales Steiner t -Design mit $t \geq 3$. Genau dann operiert $G \leq \text{Aut}(D)$ fahnentransitiv auf D , wenn einer der folgenden Fälle auftritt:

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

Sei D ein nicht-triviales Steiner t -Design mit $t \geq 3$. Genau dann operiert $G \leq \text{Aut}(D)$ fahnentransitiv auf D , wenn einer der folgenden Fälle auftritt:

(1) **Affine Raum:** das 3 - $(2^d, 4, 1)$ Design

Punkte: Punkte von $\text{AG}(d, 2)$

Blöcke: Ebenen von $\text{AG}(d, 2)$, und einer der Fälle:

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

Sei D ein nicht-triviales Steiner t -Design mit $t \geq 3$. Genau dann operiert $G \leq \text{Aut}(D)$ fahnentransitiv auf D , wenn einer der folgenden Fälle auftritt:

(1) **Affine Raum:** das 3 - $(2^d, 4, 1)$ Design

Punkte: Punkte von $\text{AG}(d, 2)$

Blöcke: Ebenen von $\text{AG}(d, 2)$, und einer der Fälle:

- (i) $d \geq 3$, und $G \cong \text{AGL}(d, 2)$,
- (ii) $d = 3$, und $G \cong \text{AGL}(1, 8)$ oder $\text{A}\Gamma\text{L}(1, 8)$,
- (iii) $d = 4$, und $G_0 \cong A_7$,
- (iv) $d = 5$, und $G \cong \text{A}\Gamma\text{L}(1, 32)$,

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(2) **Kreisgeometrie:** ein $3-(q^e + 1, q + 1, 1)$ Design,
 $q \geq 3$ eine Primzahlpotenz, $e \geq 2$.

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(2) **Kreisgeometrie:** ein 3 - $(q^e + 1, q + 1, 1)$ Design,
 $q \geq 3$ eine Primzahlpotenz, $e \geq 2$.

Punkte: Elemente der projektiven Geraden $GF(q^e) \cup \{\infty\}$

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(2) **Kreisgeometrie:** ein $3-(q^e + 1, q + 1, 1)$ Design,
 $q \geq 3$ eine Primzahlpotenz, $e \geq 2$.

Punkte: Elemente der projektiven Geraden $GF(q^e) \cup \{\infty\}$

Blöcke: Bilder von $GF(q) \cup \{\infty\}$ unter $PGL(2, q^e)$
(resp. $PSL(2, q^e)$, e ungerade), und

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(2) **Kreisgeometrie:** ein $3-(q^e + 1, q + 1, 1)$ Design,
 $q \geq 3$ eine Primzahlpotenz, $e \geq 2$.

Punkte: Elemente der projektiven Geraden $GF(q^e) \cup \{\infty\}$

Blöcke: Bilder von $GF(q) \cup \{\infty\}$ unter $PGL(2, q^e)$
 (resp. $PSL(2, q^e)$, e ungerade), und

$$PSL(2, q^e) \leq G \leq P\Gamma L(2, q^e),$$

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

- (3) **Erweitertes Nettosystem:** ein 3 - $(q+1, 4, 1)$ Design,
 $q \equiv 7 \pmod{12}$ Primzahlpotenz

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(3) **Erweitertes Nettosystem:** ein $3-(q+1, 4, 1)$ Design,
 $q \equiv 7 \pmod{12}$ Primzahlpotenz

Punkte: Elemente der projektiven Geraden $GF(q) \cup \{\infty\}$

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(3) **Erweitertes Nettosystem:** ein $3-(q+1, 4, 1)$ Design,
 $q \equiv 7 \pmod{12}$ Primzahlpotenz

Punkte: Elemente der projektiven Geraden $GF(q) \cup \{\infty\}$

Blöcke: Bilder von $\{0, 1, \varepsilon, \infty\}$ unter $PSL(2, q)$, wobei ε
eine primitive sechste Einheitswurzel in $GF(q)$, und

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(3) **Erweitertes Nettosystem:** ein $3-(q+1, 4, 1)$ Design,
 $q \equiv 7 \pmod{12}$ Primzahlpotenz

Punkte: Elemente der projektiven Geraden $GF(q) \cup \{\infty\}$

Blöcke: Bilder von $\{0, 1, \varepsilon, \infty\}$ unter $PSL(2, q)$, wobei ε
 eine primitive sechste Einheitswurzel in $GF(q)$, und

$$PSL(2, q) \leq G \leq P\Sigma L(2, q),$$

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(4) **Mathieu-Witt Design:**

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

- (4) **Mathieu-Witt Design:** Einer der Fälle:
- (i) das 3 -($22, 6, 1$) Design, und $G \supseteq M_{22}$,

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(4) **Mathieu-Witt Design:** Einer der Fälle:

- (i) das 3-(22, 6, 1) Design, und $G \supseteq M_{22}$,
- (ii) das 4-(11, 5, 1) Design, und $G \cong M_{11}$,
- (iii) das 4-(23, 7, 1) Design, und $G \cong M_{23}$,

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(4) **Mathieu-Witt Design:** Einer der Fälle:

- (i) das 3-(22, 6, 1) Design, und $G \supseteq M_{22}$,
- (ii) das 4-(11, 5, 1) Design, und $G \cong M_{11}$,
- (iii) das 4-(23, 7, 1) Design, und $G \cong M_{23}$,
- (iv) das 5-(12, 6, 1) Design, und $G \cong M_{12}$,
- (v) das 5-(24, 8, 1) Design, und $G \cong PSL(2, 23)$ oder M_{24} .

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(4) **Mathieu-Witt Design:** Einer der Fälle:

- (i) das 3-(22, 6, 1) Design, und $G \supseteq M_{22}$,
- (ii) das 4-(11, 5, 1) Design, und $G \cong M_{11}$,
- (iii) das 4-(23, 7, 1) Design, und $G \cong M_{23}$,
- (iv) das 5-(12, 6, 1) Design, und $G \cong M_{12}$,
- (v) das 5-(24, 8, 1) Design, und $G \cong PSL(2, 23)$ oder M_{24} .

Bemerkungen:

- ① Beweis umfasst mehr als 80 Seiten;

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(4) **Mathieu-Witt Design:** Einer der Fälle:

- (i) das 3-(22, 6, 1) Design, und $G \supseteq M_{22}$,
- (ii) das 4-(11, 5, 1) Design, und $G \cong M_{11}$,
- (iii) das 4-(23, 7, 1) Design, und $G \cong M_{23}$,
- (iv) das 5-(12, 6, 1) Design, und $G \cong M_{12}$,
- (v) das 5-(24, 8, 1) Design, und $G \cong PSL(2, 23)$ oder M_{24} .

Bemerkungen:

- 1 Beweis umfasst mehr als 80 Seiten; Interplay aus Kombinatorik, Gruppentheorie, Inzidenzgeometrie, Zahlentheorie.

Fahnentransitive kombinatorische Designs

Theorem (H. 2005/06)

(4) **Mathieu-Witt Design:** Einer der Fälle:

- (i) das 3-(22, 6, 1) Design, und $G \supseteq M_{22}$,
- (ii) das 4-(11, 5, 1) Design, und $G \cong M_{11}$,
- (iii) das 4-(23, 7, 1) Design, und $G \cong M_{23}$,
- (iv) das 5-(12, 6, 1) Design, und $G \cong M_{12}$,
- (v) das 5-(24, 8, 1) Design, und $G \cong PSL(2, 23)$ oder M_{24} .

Bemerkungen:

- 1 Beweis umfasst mehr als 80 Seiten; Interplay aus Kombinatorik, Gruppentheorie, Inzidenzgeometrie, Zahlentheorie.
- 2 Resultat ist u.a. bedeutend für eine zukünftige einheitliche geometrische Theorie der sporadischen einfachen Gruppen.

Kombinatorische Designs

Offenes Problem

Was lässt sich sagen über blocktransitive Steiner t -Designs?

Kombinatorische Designs

Offenes Problem

Was lässt sich sagen über blocktransitive Steiner t -Designs?

Theorem (Cameron-Praeger 1993)

Falls $G \leq \text{Aut}(D)$ blocktransitiv auf D operiert, dann gilt $t \leq 7$.

Kombinatorische Designs

Offenes Problem

Was lässt sich sagen über blocktransitive Steiner t -Designs?

Theorem (Cameron-Praeger 1993)

Falls $G \leq \text{Aut}(D)$ blocktransitiv auf D operiert, dann gilt $t \leq 7$.

Vermutung (Cameron-Praeger)

Es existieren keine blocktransitiven Steiner 6-Designs.

Überblick

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien
- 3 Erdős-Probleme: Kombinatorische Zahlentheorie**
- 4 Real World Application: Fahrplan-Optimierung

Kombinatorische Zahlentheorie

- Additive Zahlentheorie: **Arithmetische Progressionen**
Gowers, Tao (Fields-Medaillen 1998, 2006)

Kombinatorische Zahlentheorie

- Additive Zahlentheorie: **Arithmetische Progressionen**
Gowers, Tao (Fields-Medaillen 1998, 2006)
- Multiplikative Zahlentheorie: **Primitive Folgen**

Kombinatorische Zahlentheorie

- Additive Zahlentheorie: **Arithmetische Progressionen**
Gowers, Tao (Fields-Medaillen 1998, 2006)
- Multiplikative Zahlentheorie: **Primitive Folgen**

Definition

Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft

Kombinatorische Zahlentheorie

- Additive Zahlentheorie: **Arithmetische Progressionen**
Gowers, Tao (Fields-Medaillen 1998, 2006)
- Multiplikative Zahlentheorie: **Primitive Folgen**

Definition

Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_i \nmid a_j \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Kombinatorische Zahlentheorie

- Additive Zahlentheorie: **Arithmetische Progressionen**
Gowers, Tao (Fields-Medaillen 1998, 2006)
- Multiplikative Zahlentheorie: **Primitive Folgen**

Definition

Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_i \nmid a_j \quad \text{für } i \neq j.$$

(„kein Term teilt einen anderen“)

Kombinatorische Zahlentheorie

- Additive Zahlentheorie: **Arithmetische Progressionen**
Gowers, Tao (Fields-Medaillen 1998, 2006)
- Multiplikative Zahlentheorie: **Primitive Folgen**

Definition

Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft

$$a_i \nmid a_j \quad \text{für } i \neq j.$$

(„kein Term teilt einen anderen“)

Solche Folgen heissen **primitiv**; werden vermehrt seit 1930er studiert.

Kombinatorische Zahlentheorie

Beispiel (unendliche primitive Folge)

Menge aller natürlicher Zahlen, die aus genau r Primfaktoren zusammengesetzt sind (für jedes feste $r \in \mathbb{N}$).

Kombinatorische Zahlentheorie

Beispiel (unendliche primitive Folge)

Menge aller natürlicher Zahlen, die aus genau r Primfaktoren zusammengesetzt sind (für jedes feste $r \in \mathbb{N}$).

Beispiel (endliche primitive Folge)

Links offene Intervall

$$\left(\frac{n}{2}, n\right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist eine primitive Folge der Länge $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Kombinatorische Zahlentheorie

Beispiel (unendliche primitive Folge)

Menge aller natürlicher Zahlen, die aus genau r Primfaktoren zusammengesetzt sind (für jedes feste $r \in \mathbb{N}$).

Beispiel (endliche primitive Folge)

Links offene Intervall

$$\left(\frac{n}{2}, n\right] \quad (n \in \mathbb{N})$$

ist eine primitive Folge der Länge $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Offensichtlich

- gibt es mindestens $2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ solcher Folgen
- kann es keine längere Folge geben.

Primitive Zahlenfolgen

Offenes Problem

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $f(n)$ die Anzahl der Zahlenfolgen

$$1 \leq a_1 < \dots < a_t \leq n$$

mit $a_i \nmid a_j$ für $i \neq j$.

Frage: Existiert der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)^{\frac{1}{n}} \quad ?$$

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Bemerkungen:

① $GW \approx 1,58$

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Bemerkungen:

- 1 $GW \approx 1,58$
- 2 Kalmár 1930

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Bemerkungen:

- 1 $GW \approx 1,58$
- 2 Kalmár 1930
- 3 Granville, Pomerance, Calkin

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Bemerkungen:

- 1 $GW \approx 1,58$
- 2 Kalmár 1930
- 3 Granville, Pomerance, Calkin
- 4 Verallgemeinerungen: k -primitiv ("kein Term teilt k andere"),

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Bemerkungen:

- ① $GW \approx 1,58$
- ② Kalmár 1930
- ③ Granville, Pomerance, Calkin
- ④ Verallgemeinerungen: k -primitiv ("kein Term teilt k andere"), quasi-primitiv ($\text{ggT}(a_i, a_j) = a_r$ nicht lösbar für $r < i < j$)

Primitive Zahlenfolgen

Vermutung (Cameron-Erdős)

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt für die Anzahl $f(n)$ primitiver Zahlenfolgen:

$$f(n) = (c + o(1))^n$$

für eine Konstante c .

Bemerkungen:

- 1 $GW \approx 1,58$
- 2 Kalmár 1930
- 3 Granville, Pomerance, Calkin
- 4 Verallgemeinerungen: k -primitiv ("kein Term teilt k andere"), quasi-primitiv ($\text{ggT}(a_i, a_j) = a_r$ nicht lösbar für $r < i < j$)
Finch (2003): "wide open areas for research".

Überblick

- 1 Millionär werden durch Mathematik: $P = NP$?
- 2 Exotische kleine Welten: Endliche Geometrien
- 3 Erdős-Probleme: Kombinatorische Zahlentheorie
- 4 Real World Application: Fahrplan-Optimierung**

Kombinatorische Optimierung

Frage:

Wie komme ich am schnellsten von einem Ort zum anderen ?

Kombinatorische Optimierung

Frage:

Wie komme ich am schnellsten von einem Ort zum anderen ?

Grundlegender **Algorithmus von Dijkstra** zur Berechnung kürzester Wege in gewichteten Graphen, z.B. für:

Kombinatorische Optimierung

Frage:

Wie komme ich am schnellsten von einem Ort zum anderen ?

Grundlegender **Algorithmus von Dijkstra** zur Berechnung kürzester Wege in gewichteten Graphen, z.B. für:

- Routenplanung für Auto-Verkehr
- Datenbankabfrage

Kombinatorische Optimierung

Frage:

Wie komme ich am schnellsten von einem Ort zum anderen ?

Grundlegender **Algorithmus von Dijkstra** zur Berechnung kürzester Wege in gewichteten Graphen, z.B. für:

- Routenplanung für Auto-Verkehr
- Datenbankabfrage
- Websuche
- Fahrplanoptimierung bei öffentlichen Verkehrsmitteln

Dijkstra-Algorithmus

[Tafel]

Click me!

Dijkstra-Algorithmus

[Applet]

Click me!

Dijkstra-Algorithmus

Bemerkungen:

- 1 Dijkstra-Algorithmus 1959

Dijkstra-Algorithmus

Bemerkungen:

- 1 Dijkstra-Algorithmus 1959
- 2 Modifikationen des Algorithmus, z.T. heuristische Varianten

Dijkstra-Algorithmus

Bemerkungen:

- 1 Dijkstra-Algorithmus 1959
- 2 Modifikationen des Algorithmus, z.T. heuristische Varianten
- 3 Speed-up Techniken für bestimmte Szenarien

Fahrplan-Optimierung (MATHEON, Berlin)

[Kurzfilm]