Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 28.04.2008

Übungen zu Algebra II (3)

(9) Man zeige, dass das Polynom $X^4 + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Man folgere, dass $L = \mathbb{Q}(e^{2\pi i/8})$ den Grad 4 über $\mathbb{Q}$ hat. Man zeige ferner, dass $\mathbb{Q}(i)$ $(i^2 = -1)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ Teilkörper von L sind.

(10) Man zeige, dass das Polynom $f = X^4 + 4$ *nicht* irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Man gebe die (beiden) Primfaktoren (in $\mathbb{Q}[X]$) und die komplexen Wurzeln von f an.

(11) Seien a, b Elemente des Körpers K, $a \neq 0$. Die Einsetzung $X \mapsto aX + b$ definiert dann K-Automorphismen des Rings $K[X]$ und des Körpers $K(X)$. Man fogere, dass ein Polynom $f = f(X)$ über K genau dann irreduzibel über K ist, wenn $f(aX + b)$ es ist. Man wende dies an in folgendem Beispiel: $K = \mathbb{Q}$, p Primzahl und $f = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$. Man zeige, dass $f(X + 1)$ nach dem Eisenstein-Kriterium irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. (Alle Binomialkoeffizienten $\binom{p}{i}$ für $1 \leq i \leq p - 1$ sind durch p teilbar.)

(12) Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung und $\sigma : L \to L$ eine K-Einbettung (Ringhomomorphismus mit $\sigma|K = id_K$, also automatisch injektiv nach (1.2) der Vorlesung). Man zeige, dass σ auch surjektiv ist, also ein Element der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L|K)$.