Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 19.05.2008

Übungen zu Algebra II (5)

(21) Man berechne die Gruppe G aller Automorphismen des Körpers $L = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{7})$. Warum ist $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$? Warum ist L der Zerfällungskörper des Polynoms $f = (X^2-5)(X^2-7)$ über $\mathbb{Q}$? Man zeige ferner, dass L auch der Zerfällungskörper (in $\mathbb{R}$) des Polynoms $g = X^4-24X^2+4$ in $\mathbb{Q}[X]$ ist. Wie operiert G auf den Wurzeln von g ? (Hinweis: $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7}$ ist eine Wurzel von g.) Wie können $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f)$ und $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(g)$ als Permutationsgruppen (auf je 4 Elementen) identifiziert werden ?

(22) Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, wobei $\alpha = \sqrt[3]{5}$ die reelle Zahl ist, deren dritte Potenz 5 ist.
(a) $f = X^3 - 5$ ist das Minimalpolynom $m_{\mathbb{Q},\alpha}$ von α.
(b) $[K : \mathbb{Q}] = 3$, also α nicht konstruierbar mit Zirkel und Lineal.
(c) K hat außer der Identität keinen Körperautomorphismus.
(d) $L = K(i\sqrt{3})$ ist der Zerfällungskörper von f in $\mathbb{C}$ ($i^2 = -1$).
(e) $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(f) \cong S_3$ ist *die* nichtabelsche Gruppe der Ordnung 6.

(23) Sei $\bar{\mathbb{Q}}$ die Menge der komplexen Zahlen, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind. Man zeige, dass $\bar{\mathbb{Q}}$ ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist (und zwar ein echter). Unter Verwendung der Tatsache, dass $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen ist (jedes nichtkonstante komplexe Polynom zerfällt in $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren), zeige man, dass auch $\bar{\mathbb{Q}}$ algebraisch abgeschlossen ist.

(24) Wie sieht die Primfaktorzerlegung eines reellen Polynoms aus ? Man diskutiere die Polynome $X^3 - X + 1$ und $X^4 - 8X + 12$.