Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 26.05.2008

Übungen zu Algebra II (6)

(25) Sei $\varepsilon \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von $f = X^4 - X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $L = \mathbb{Q}(\varepsilon)$. Man zeige, dass $\varepsilon^{12} = 1$ und dass $\mathbb{Q}(i)$ und $\mathbb{Q}(i\sqrt{3})$ Teilkörper von L sind ($i^2 = -1$). Man folgere, dass $[L : \mathbb{Q}] = 4$ und dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist. Warum ist L *der* Zerfällungskörper von f (in $\mathbb{C}$)? Man gebe $\mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ an.
Zusatz. Warum ist das regelmäßige 12-Eck mit Zirkel und Lineal (über $\mathbb{Q}$) konstruierbar ?

(26) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Wurzel von $g = X^4 + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X]$ und $F = \mathbb{Q}(\alpha)$. Man berechne $[F : \mathbb{Q}]$ und gebe sämtliche Teilkörper von F an. Ferner berechne man den Zerfällungskörper L von g in $\mathbb{C}$ und gebe $[L : \mathbb{Q}]$ an.

(27) Seien $K \subset F \subset L$ Körper mit $[F : K] = [L : F] = 2$.
(a) Warum sind $F|K$ und $L|F$ normale Erweiterungen ? - Man gebe ein Beispiel dafür an, dass $L|K$ nicht normal zu sein braucht.
(b) Sei $L|K$ als nicht normal vorausgesetzt. Man zeige, dass dann F der einzige echte Zwischenkörper von $L|K$ ist und daher $L = K(\alpha)$ gilt für jedes $\alpha \in L \setminus F$.

(28) Sei $L|K$ eine algebraische Körpererweiterung. Zerfällt jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ in $L[X]$ in Linearfaktoren, so ist L algebraisch abgeschlossen, also *der* algebraische Abschluss von K.