Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 9.06.2008

Übungen zu Algebra II (8)

Das Polynom $f = X^4 + aX^2 + b$ sei irreduzibel über dem Körper K. Sei $W = W_f$ die Wurzelmenge, $L = K(W)$ *der* Zerfällungskörper von f und $G = \mathrm{Gal}(L|K)$. Man zeige:

(33) Es ist $[L : K] = 4$ oder 8 und $|G| = 1, 2, 4$ oder 8.
(a) Genau dann ist f separabel über K ($|W| = 4$), wenn $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ist.
(b) Ist $\mathrm{char}(K) = 2$, so ist $L_G|K$ (rein inseparabel) vom Grade 2 oder 4.
(c) Es ist ferner entweder $|G| = 1, |W| = 1, a = 0$ oder $|G| = 2, |W| = 2, a \neq 0$. Warum ist $L|L_G$ in jedem Falle galoissch?

(34) Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ vorausgesetzt. Man zeige, dass dann $a^2 - 4b \notin K^2$ kein Quadrat in K ist. Ist $b \in K^2$ ein Quadrat in K, so ist $G \cong V_4$ eine Vierergruppe.

(35) Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $b \notin K^2$ und $b(a^2 - 4b) \in K^2$, so ist G zyklisch der Ordnung 4.
Zusatz. Ist $\mathrm{char}(K) \neq 2$, $b \notin K^2$ und $b(a^2 - 4b) \notin K^2$, so ist $G \cong D_4$ die Diedergruppe der Ordnung 8.

(36) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $a = 1$, $b = -1$. Nach Aufgabe (26) ist in der Tat $f = X^4 + X^2 - 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$. Man zeige, dass in diesem Falle $G \cong D_4$ die Diedergruppe der Ordnung 8 ist. Man bestimme hier ferner den Verband der Teilkörper von L.