Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 15.10.2007

Übungen zu Analysis III (1)

(1) Man zeichne folgende Mengen:
(a) $M = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| \geq 2\}$.
(b) $N = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-1| \leq |z+1|\}$.
(c) $X = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 \leq \mathrm{Re}(iz) < 2\pi\}$.
(d) $M_a = \{z \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Im}(z^2) = a\}$ für festes $a \in \mathbb{C}$.

(2) Für alle komplexen Zahlen z, w gilt:
(a) $|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{z}w)$.
(b) $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
Man deute diese Identitäten geometrisch.

(3) Seien drei paarweise verschiedene komplexe Zahlen z_i gegeben. Man zeige, dass $\arg(\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1})$ gerade den Winkel meint, um den man die von z_2 nach z_3 führende Richtung im positiven Sinne drehen muss, bis sie in die von z_1 nach z_3 führende übergeht (also praktisch den Winkel bei z_3 im Dreieck z_1, z_2, z_3). Was passiert, wenn die z_i auf einer (reellen) Geraden liegen ?

(4) Unter dem Doppelverhältnis von vier verschiedenen komplexen Zahlen z_i versteht man den Ausdruck $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_3} : \frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$. Man zeige, dass dieses Doppelverhältnis genau dann reell ist, wenn die z_i entweder auf einer (reellen) Geraden oder auf einem Kreis liegen. (Man verwende den Satz über die Umfangswinkel im Kreis aus der Elementargeometrie.)