Universität Tübingen

Mathematisches Institut — Tübingen, den 22.10.2007

Übungen zu Analysis III (2)

(5) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt $|\exp(z) - 1| \leq \exp(|z|) - 1 \leq |z| \cdot \exp(|z|)$.

(6) Man untersuche das Konvergenzverhalten von $\exp(z)$, wenn z sich auf einer von 0 ausgehenden Halbgeraden (mit konstantem Argument $\arg(z)$) bewegt. Man unterscheide die Fälle $-\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2}$ und $\arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}$.

(7) Durch Ausmultiplizieren der betreffenden unendlichen Reihen beweise man:
(a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
(b) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$
(c) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.

(8) Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ mit $ab - c\bar{c} < 0$ sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = az\bar{z} + \bar{c}z + c\bar{z} + c$.
(a) $M = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ ist entweder eine Kreislinie oder eine reell-affine Gerade in der komplexen Ebene.
(b) Was stellt die Menge $N = \{z \in \mathbb{C} : f(z) > 0\}$ dar ?
(c) Jede Kreislinie oder jede reell-affine Gerade in der komplexen Ebene ist von der Form $M = M_{a,b,c}$ wie in (a).