Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 12.11.2007

Übungen zu Analysis III (5)

(17) Sei $S = \{re^{it} | \, r \in \mathbb{R}_{>0} \; und \; |t| < \pi\}$. Man zeige, dass durch $\mathrm{Log}(re^{it}) = \ln r + it$ eine auf S holomorphe Funktion erklärt wird, der *Hauptzweig* des komplexen Logarithmus. Man zeige $\mathrm{Log}'(z) = \frac{1}{z}$ $(z \in S)$ und berechne $\int_\gamma \frac{dz}{z}$ für irgendeine stückweise glatte Kurve γ in S mit Anfangspunkt $-\pi i$ und Endpunkt $1 + \pi i$.

(18) Sei $D \subseteq \mathbb{C}^*$ ein Gebiet mit $1 \in D$. In diesem Gebiet D habe $z \mapsto \frac{1}{z}$ eine Stammfunktion f mit $f(1) = 0$ (eben den Hauptzweig des Logarithmus auf D). Man zeige, dass $\exp \circ f = id_D$ die Identität auf D ist. Man zeige ferner, dass D für kein $r > 0$ alle Punkte der Kreislinie um 0 mit Radius r enthält.

(19) Seien $\gamma_k : [-1, 1] \to \mathbb{C}^*$ die (geschlossenen, stückweise glatten) Kurven gegeben durch $\gamma_1(t) = 1 + 2|t|e^{\pi it}$, $\gamma_2(t) = e^{\pi it}$ und $\gamma_3(t) = e^{2\pi it}$.
(a) Man zeige, dass γ_1 und γ_2 homotop sind als geschlossene Kurven in $\mathbb{C}^*$.
(b) Man berechne $\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z}$ für $k = 1, 2, 3$. - Warum sind γ_1 und γ_3 nicht homotop als geschlossene Kurven in $\mathbb{C}^*$?

(20) Sei $K = \{z \in \mathbb{C} \; |z| \leq 1\}$ die (kompakte) Einheitskreisscheibe um 0 und $f : K \to \mathbb{C}$ stetig. Ist f holomorph im Inneren von K, so gilt $\int_{\partial K} f(z)dz = 0$.