Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 19.11.2007

Übungen zu Analysis III (6)

(21) Sei $K = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq r\}$ die kompakte Kreisscheibe um 0 mit Radius $r > 0$ und ∂K ihr orientierter Rand. Sei $f : K \to \mathbb{C}$ stetig und $\gamma = f \circ \partial K$. Ist $w \in \mathbb{C}$ nicht im Bild von γ und ist der Index $I(\gamma, w) \neq 0$, so nimmt f im Inneren von K mindestens einmal den Wert w an. (Warum ist der Index $I(\gamma, w)$ für beliebige stetige Kurven γ definiert ?)

(22) Sei $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ für $z \neq \pm i$. Es gilt $f(z) = \frac{1}{2i}(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i})$ für $z \neq \pm i$, und f ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$. Man gebe f' an. Für jedes $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $K_r = \{z \in \mathbb{C} |\ \mathrm{Im}(z) \geq 0, |z - i| \leq r\}$. Man berechne $\int_{\partial K_r} f(z)dz$. Durch Übergang zum Grenzwert $r \to +\infty$ folgere man

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi.$$

(23) Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ wie in Aufgabe 22. Sei $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ irgendeine (stetige) Kurve, die die Punkte 0 und 1 verbindet. Welche Werte sind für $\int_\gamma f(z)dz$ möglich ?

(24) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $0 \in D$ und $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ mit $\tan \circ f = id_D$ (ein Zweig des Arcustangens). Man berechne f' und zeige, dass $D \subseteq \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ ist. Man zeige ferner, dass f durch die zusätzliche Forderung $f(0) = 0$ eindeutig festgelegt ist (Hauptzweig).