Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 10.12.2007

Übungen zu Analysis III (9)

(33) Sei S die längs der negativen reellen Achse geschlitzte Ebene. Für $z \in S$ und $a \in \mathbb{C}$ wird der Hauptwert der Potenz z^a erklärt durch $z^a = \exp(a \operatorname{Log} z)$.
(a) Man zeige, dass $z \mapsto z^a$ holomorph auf S ist, und berechne die Ableitung.
(b) Man berechne i^i.

(34) Im Reellen versteht man unter der Binomialreihe $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots$, die offenbar für $|x| < 1$ konvergiert. Man zeige, dass im Komplexen der Hauptwert der Potenz die Darstellung $(1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$ für $|z| < 1$ hat. [Man setze die Reihe $a\operatorname{Log}(1+z) = a(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + - \cdots)$ anstelle von z in der Potenzreihe für e^z und ordne nach Potenzen von z.]

(35) Man entwickle die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)}$ um den Punkt $a = 1$ in eine Laurentreihe derart, dass die Reihe für $z = \frac{1}{2}$ konvergiert. Wie sieht die Reihe aus, wenn Konvergenz für $z = \frac{i}{2}$ bzw. für $z = 2i$ gelten soll ?

(36) Ist $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ eine ganze, nichtkonstante Funktion, so ist $f(\mathbb{C})$ dicht in $\mathbb{C}$.