Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 23.04.2007

Übungen zur Charaktertheorie (2)

(5) Sei F ein Körper mit char(F) $\neq 2$ und seien a, b Elemente $\neq 0$ von F. Sei A der 4-dimensionale F-Vektorraum mit Basis $\{1, i, j, k\}$. Auf A werde eine Multiplikation erklärt mit 1 als Neutralelement und $i^2 = a\,(= a1)$, $j^2 = b\,(= b1)$, $ij = k = -ji$, $k^2 = -ab\,(= -ab1)$ und $jk = -kj = -bi$, $ki = -ik = -aj$, sowie F-linearer (distributiver) Fortsetzung auf ganz A. Man zeige, dass A assoziativ, also eine F-Algebra in unserem Sinne ist. Man nennt $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ die durch a, b bestimmte *Quaternionenalgebra* über F.

(6) Sei $G = \langle g \rangle$ eine endliche zyklische Gruppe der Ordnung n und K ein Körper, der eine *primitive* n-te Einheitswurzel ε enthält. Warum gilt $1 + \varepsilon^i + \varepsilon^{2i} + \cdots + \varepsilon^{(n-1)i} = 0$ für alle $0 < i < n$? Warum ist char(K) $\nmid$ n ? Man zeige, dass die

$$e_i = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-ij} g^j$$

für $i = 0, \cdots, n-1$ die Blockidempotenten der Gruppenalgebra KG sind.

(7) Seien $G = \langle g \rangle$ und ε wie in (6), und sei $K = \mathbb{Q}$. Es ist $\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q}[X]/(X^n - 1)$. Bekanntlich (Gauß) ist $X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X)$ die Primfaktorzerlegung über $\mathbb{Q}$, wobei $\Phi_d(X)$ das d-te Kreisteilungspolynom ist (normiert vom Grade $\varphi(d)$ mit den primitiven d-ten Einheitswurzeln als Nullstellen über $\mathbb{C}$). Man zeige:
(a) $\mathbb{Q}G \cong \prod_{d|n} \mathbb{Q}_d$, wobei $\mathbb{Q}_d$ der d-te Kreisteilungskörper über $\mathbb{Q}$ ist.
(b) Es gibt bis auf Isomorphie genau $\tau(n)$ viele irreduzible $\mathbb{Q}G$-Moduln, wobei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler d von n ist.
(c) Ist $d \mid n$ und $1 \leq j \leq n-1$, so ist $c_{d,j} = \sum_{i=1}^{d} \varepsilon^{-ijn/d}$ eine ganze Zahl und

$$e_d = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} c_{d,j} g^j$$

ein Blockidempotent von $\mathbb{Q}G$.

(8) Sei G eine endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ und $g \in G$ ein Element der Ordnung p^r für eine Primzahl p. Man zeige, dass $\varphi(p^r) = p^{r-1}(p-1) \leq m$ gilt. Insbesondere hat $|G|$ keine Primteiler p mit $p > m + 1$.