Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 30.04.2007

Übungen zur Charaktertheorie (3)

(9) Sei p eine Primzahl und G eine (zyklische) Gruppe der Ordnung p. Nach Aufgabe (7) hat $\mathbb{Q}G$ genau zwei irreduzible Moduln (bis auf Isomorphie), und diese haben die Grade 1 und $p-1$. Man gebe eine irreduzible Matrixdarstellung von G über $\mathbb{Q}$ explizit an.

(10) Sei $A = KG$ die Gruppenalgebra der endlichen Gruppe G über dem Körper K. Man zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(i) Das Augmentationsideal $I_G = \langle g - 1 \,|\, 1 \neq g \in G \rangle_K$ von A ist nilpotent.
(ii) $I_G = J(A)$.
(iii) A hat bis auf Isomorphie nur einen irreduziblen Modul (nämlich den trivialen $K = K_G$).
(iv) char(K) = p ist eine Primzahl und G eine p-Gruppe.

(11) Man bestimme das Jacobson-Radikal $J = J(KS_3)$ für die symmetrische Gruppe S_3 in Abhängigkeit von der Charakteristik des Körpers K. Man berechne überdies J^2 und J^3.

(12) Ist A eine kommutative, unzerlegbare Algebra (Block) über dem Körper K, so ist A eine *lokale* K-Algebra, d.h., $J(A)$ ist das einzige maximale Ideal von A. Jedes Element von A ist entweder nilpotent oder invertierbar.