Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 7.05.2007

Übungen zur Charaktertheorie (4)

Durchweg ist A eine Algebra über dem Körper K (in unserem Sinne).

(13) Sei V ein A-Modul und $E = \mathrm{End}_A(V)$. Warum ist E eine K-Algebra ?
(a) Ist V irreduzibel, so ist $\dim_{\mathrm{K}}\mathrm{E}$ ein Teiler von $\dim_{\mathrm{F}}\mathrm{V}$.
(b) Ist E eine Divisionsalgebra, so ist V (direkt) unzerlegbar aber nicht notwendigerweise irreduzibel (Beispiel !).

(14) Sei $V \neq 0$ ein A-Modul und $E = \mathrm{End}_A(V)$. Zu jedem $f \in E$ gibt es eine Nummer $n \geq 1$ derart, dass $\mathrm{Ker}(f^n) = \mathrm{Ker}(f^{n+1})$ und $\mathrm{Im}(f^n) = \mathrm{Im}(f^{n+1})$ ist. Man zeige, dass dann $V = \mathrm{Ker}(f^n) \oplus \mathrm{Im}(f^n)$ eine Zerlegung von V in A-Teilmoduln ist. Ist also V unzerlegbar, so ist f entweder nilpotent oder invertierbar. In diesem Falle ist somit $J(E)$ das einzige maximale Ideal von E und $E/J(E)$ eine Divisionsalgebra (Satz von Fitting).

(15) Sei $A = KG$ eine Gruppenalgebra, mit $G \neq 1$. Hat A nur einen einzigen Block, so ist char(K) = p eine Primzahl, die in $|G|$ aufgeht, und G hat keinen Normalteiler $\neq 1$ mit zu p teilerfremder Ordnung.

(16) Man berechne die Blockzerlegung von $A = KG$ für die alternierende Gruppe $G = A_4$ (in Abhängigkeit von der Charakteristik von K).