Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 6.06.2007

Übungen zur Charaktertheorie (7)

(25) Sei N ein Normalteiler der endlichen Gruppe G.
(a) Ist χ ein Charakter von G mit $\mathrm{Ker}(\chi) \geq N$, so ist χ konstant auf den Nebenklassen von G nach N, und $\widehat{\chi} : G/N \to \mathbb{C}$ mit $\widehat{\chi}(Ng) = \chi(g)$ ist ein Charakter von G.
(b) Ist $\widehat{\chi}$ ein Charakter von G/N, so ist $\chi : G \to N$ mit $\chi(g) = \widehat{\chi}(Ng)$ ein Charakter von G.
(c) In (a) und (b) gilt $\chi \in \mathrm{Irr}(G) \iff \widehat{\chi} \in \mathrm{Irr}(G/N)$.

(26) Sei $G' = [G, G]$ die Kommutatorgruppe der endlichen Gruppe G.
(a) $G' = \bigcap\{\mathrm{Ker}(\chi) \mid \chi \in \mathrm{Irr}(G),\ \chi(1) = 1\}$.
(b) $|G : G'|$ ist die Anzahl der *linearen* Charaktere von G (mit Grad 1).

(27) Hat die endliche Gruppe G einen *treuen* irreduziblen Charakter χ (mit Kern $\mathrm{Ker}(\chi) = 1$), so ist $Z(G) = Z(\chi)$ zyklisch.

(28) Man berechne die Charaktertafel der Diedergruppe $G = D_n$ der Ordnung $2n$ ($n \geq 3$) in folgenden Schritten:
(a) $G = \langle x, y\rangle$ wird erzeugt durch ein Element x (Drehung) der Ordnung n und ein Element y (Spiegelung) der Ordnung 2, mit der Relation $yxy = x^{-1}$. Jedes Element von G ist eindeutig von der Form x^i oder yx^i $(0 \leq i \leq n-1)$.
(b) Sei $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$ und sei $t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t < \frac{n}{2}$. Definiere $\varphi_t(x^i) = \begin{pmatrix} \varepsilon^{ti} & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-ti} \end{pmatrix}$ und $\varphi_t(yx^i) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-ti} \\ \varepsilon^{ti} & 0 \end{pmatrix}$ $(0 \leq i \leq n-1)$. Die $\varphi_t : G \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ sind paarweise nichtisomorphe irreduzible Darstellungen $(1 \leq t < \frac{n}{2})$.
(c) Die Kommutatorgruppe G' hat die Ordnung $\frac{n}{2}$ bzw. n, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.
(d) G hat die Klassenzahl $k(G) = (\frac{n}{2} - 1) + 4$ bzw. $\frac{n-1}{2} + 2$, je nachdem ob n gerade oder ungerade ist.