Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 13.06.2007

Übungen zur Charaktertheorie (8)

Durchweg ist G eine endliche Gruppe.

(29) G habe die folgende Charaktertafel ($k(G) = 7$; $\varepsilon = e^{2\pi i/3}$):

G	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ε	ε^2	ε	ε^2
χ_3	1	1	1	ε^2	ε	ε^2	ε
χ_4	3	3	-1	0	0	0	0
χ_5	2	-2	0	-1	-1	1	1
χ_6	2	-2	0	$-\varepsilon$	$-\varepsilon^2$	ε	ε^2
χ_7	2	-2	0	$-\varepsilon^2$	$-\varepsilon$	ε^2	ε

(a) Man berechne $|G|$ sowie $|C_G(g_j)|$ und $|g_j^G|$ für alle j und verifiziere (exemplarisch) die Orthogonalitätsrelationen.
(b) Die Normalteiler von G sind: G, 1, $Z(G) = \{g_1, g_2\}$ und $G' = Z(G) \cup g_3^G$.
Zusatz. $G \cong \mathrm{SL}_2(3)$ ist bis auf Isomorphie durch die Charaktertafel bestimmt.

(30) Ist χ ein (komplexer) Charakter von G mit $\chi(g) = 0$ für alle $g \neq 1$ in G, so ist χ ein Vielfaches des regulären Charakters χ_{reg} von G, insbesondere $|G|$ ein Teiler des Grades $\chi(1)$ von χ.

(31) Sei χ ein Charakter von G. Definiere $\det(\chi) : G \to \mathbb{C}$ durch $\det(\chi)(g) = \det(\varphi(g))$, wobei φ irgendeine Matrixdarstellung von G mit $\chi = \chi_\varphi$ ist. Man zeige, dass $\det(\chi)$ ein wohldefinierter linearer Charakter von G ist.

(32) Sei $g \in G$ ein Element von G. Man zeige, dass g genau dann zu g^{-1} in G konjugiert ist, wenn $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ gilt für alle $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$. Hat G ein solches *reelles* Element $g \neq 1$, so ist $|G|$ gerade.