Universität Tübingen

Mathematisches Institut

Tübingen, den 18.06.2007

Übungen zur Charaktertheorie (9)

Durchweg ist G eine endliche Gruppe.

(33) Niemals ist $|G| = k(G) + 1, 2, 4$ oder 5. Ist $|G| = k(G) + 3$, so ist $G \cong S_3$, D_4 oder Q_8.

(34) Ist $|G| = k(G) + 6$, so ist $G \cong S_3 \times Z_2$. Ist $|G| = k(G) + 8$, so ist $G \cong A_4$.

(35) Ist G abelsch und H eine Untergruppe von G, so läßt sich jeder irreduzible Charakter von H zu einem Charakter von G fortsetzen.

(36) Sei p eine Primzahl. Es existiere $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ mit $\chi(1) = p$. Sei P eine p-Sylowgruppe von G.

(a) Warum ist $P \neq 1$?

(b) Warum ist die Einschränkung $\theta = \chi_P$ von χ auf P entweder irreduzibel oder die Summe von p linearen Charakteren ?

(c) Ist $\theta \in \mathrm{Irr}(P)$, so ist $Z(P) \leq Z(\chi)$. Man folgere, dass dann G nicht einfach ist.

(d) Ist θ nicht irreduzibel, so ist $P' \leq \mathrm{Ker}(\chi)$. Man folgere, dass dann G nicht einfach oder P abelsch ist.

(e) Ist G eine einfache nichtabelsche Gruppe, so ist $|P| = p \neq 2$. (Sei $1 \neq x \in P$. Nach (d) und (6.5) der Vorlesung ist $\chi(x) = 0$. Dies liefert $|P| = p$. Wäre $p = 2$, so wäre entweder $x \in \mathrm{Ker}(\chi)$ oder $x \notin \mathrm{Ker}(\det(\chi))$.)