Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 4.11.2007

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie (4)

Wir studieren die *Fibonacci-Folge* (Leonardo von Pisa, ca. 1170-1250), die rekursiv erklärt wird durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ und $f_i = f_{i-1} + f_{i-2}$ für $i \geq 3$.

(13) Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt $\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$. Man folgere $\begin{pmatrix} f_{n+2} & f_{n+1} \\ f_{n+1} & f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}$.

(14) Man zeige für alle positiven natürlichen Zahlen m, n:
(a) $f_{m+n} = f_{m-1} f_n + f_m f_{n+1}$.
(b) f_{mn} ist duch f_m teilbar.
(c) Ist $\mathrm{ggT}(n, m) = d$, so ist $\mathrm{ggT}(f_m, f_n) = f_d$.

(15) Setze $a_n = f_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Fibonacci-Folge genügt der *linearen Rekursion* $a_0 = c = 1$, $a_1 = d = 1$ und $a_{n+2} + s a_{n+1} + t a_n = 0$ mit $s = t = -1$. Nach (5.2) der Vorlesung ist dieser Rekursion das Polynom $X^2 + sX + t = X^2 - X - 1$ zugeordnet. Man folgere:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n \Big).$$

(16) Wieviele Kaninchenpaare stammen am Ende eines Jahres von einem Kaninchenpaar ab, wenn jedes Paar jeden Monat ein neues Paar gebiert, welches selbst vom zweiten Monat an Nachkommen hat ? (Diese Frage wird Fibonacci zugeordnet; es gibt viele Variationen, auch solche, wo Kaninchen mit Nudeln in Weinsauce gekocht werden.)