Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 17.01.2008

Übungen zur Elementaren Zahlentheorie (13)

(49) Man gebe den größten gemeinsamen Teiler $d = \operatorname{ggT}(80, 168)$ als Vielfachsumme in 80 und 168 an.

(50) Man berechne die Ordnung $o(3 \bmod 43)$ in $(\mathbb{Z}/43\mathbb{Z})^*$.

(51) Man berechne $\varphi(168)$.

(52) Die n-te Primzahl p_n in der natürlichen Reihe genügt der oberen Abschätzung $p_n \leq 2^{2^n}$.

(53) Man zeige, dass es unendliche viele Primzahlen $p \equiv 5 \pmod 6$ gibt.

(54) Sind $a, n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a^n - 1 \in \mathbb{P}$, so ist $a = 2$ (und $n \in \mathbb{P}$).

(55) Man berechne $(\frac{133}{67})$.

(56) Man bestimme die kleinste natürliche Zahl $n > 3$ mit $3 \mid n$, $5 \mid n + 2$ und $7 \mid n + 4$.

(57) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Sind p und q ungerade Primzahlen mit $p \equiv q \pmod{4n}$, so ist $(\frac{n}{p}) = (\frac{n}{q})$.

(58) Für keine natürliche Zahl n gilt $\varphi(n) = 14$.

(59) Man zeige, dass das Polynom $f = X^3 + X + 1$ irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$ ist und konstruiere so den Körper $\mathbb{F}_8 = \mathbb{F}_2[X]/(f)$ der Ordnung 8. Welche Ordnung hat die Restklasse $[X]$ von X in der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{F}_8$?

(60) Hat $X^2 + 3X + 7$ eine Wurzel (Nullstelle) in $\mathbb{F}_{17}$, oder nicht (Begründung !) ?