Universität Tübingen

Mathematisches Institut Tübingen, den 18.12.2006

Übungen zur Gruppentheorie (10)

(37) Seien X und Y Untergruppen der Gruppe G.
(a) Ist $Y \subseteq Y_0 \subseteq G$, so ist $(X \cap Y_0)Y = XY \cap Y_0$ (Dedekind-Identiät).
(b) Ist X ein Komplement zu Y in G, d.h.: $G = XY$ und $X \cap Y = 1$, und ist $Y_0 \geq Y$ eine Untergruppe von G, so ist $X \cap Y_0$ ein Komplement zu Y in Y_0.

(38) Sei $G = \langle x_1, \cdots, x_r \rangle$ eine endlich erzeugbare Gruppe und H eine Untergruppe mit endlichem Index $|G : H| = n$. Man zeige, dass H durch höchstens

$$rn - (n - 1)$$

Elemente erzeugt werden kann. (Diese Schranke ist bestmöglich, wie das Beispiel der zyklischen Gruppen zeigt. Zum Beweis konstruiere man eine Rechtstransversale $\{t_i\}$ zu H in G mit $t_1 = 1, t_2 = x_j$ für $x_j \notin H$ und rekursiv $t_{i+1} = t_i x_{j'}$ für $i < n$ und geeignetes j'. Dann verfahre man wie in (8.4) der Vorlesung.)

(39) Hat die endliche Gruppe G abelsche p-Sylowgruppen, so ist p kein Teiler von $|G' \cap Z(G)|$.

(40) Sei P eine 2-Sylowgruppe der endlichen Gruppe G und X eine maximale Untergruppe von P. Warum ist $|P : X| = 2$, und warum ist $P' = X$ nur dann, wenn $X = 1$ ist? - Sei x eine Involution in P (Element der Ordnung 2). Warum hat x auf $P \backslash G$ ungerade viele Fixpunkte (bei Rechtsmultiplikation) ? Liegt keine G-Konjugierte von x in X ($x^G \cap X = \varnothing$), so ist $V_P^G(x) \notin X/P'$. Insbesondere hat G dann einen Normalteiler mit Index 2.