Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 22.01.2007

Übungen zur Gruppentheorie (13)

(49) Man berechne die Elementarteiler der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 0 \\ 6 & -12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Welche abelsche Gruppe G hat C als Relationenmatrix ?

(50) Jede endliche Gruppe G, deren Ordnung $|G|$ quadratfrei ist, ist auflösbar.

(51) Jede endliche abelsche Gruppe G, deren Ordnung $|G|$ quadratfrei ist, ist zyklisch.

(52) Jede endliche abelsche Gruppe G hat zu jedem positiven Teiler d von $|G|$ eine Untergruppe der Ordnung d. (Dies ist falsch für nichtabelsche Gruppen.)

(53) Ist N ein Normalteiler der Gruppe G und ist G/N unendlich zyklisch, so gibt es ein Komplement zu N in G.

(54) Man gebe (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen der Ordnung 1.000 an.

(55) Sei G eine endliche abelsche p-Gruppe für eine Primzahl p. Ist $g \in G$ ein Element größter Ordnung in G, so gibt es ein Komplement zu $\langle g \rangle$ in G.

(56) Wieviele nilpotente Gruppen der Ordnung 40 gibt es (bis auf Isomorphie) ?

(57) Warum ist jede Gruppe der Ordnung 350 auflösbar ?

(58) Sei G eine Gruppe der Ordnung 24 und P eine 2-Sylowgruppe von G. Ist P nicht normal in G, so gibt es in G einen Normalteiler der Ordnung 4.

(59) Seien G, P wie in (58). Ist P eine Quaternionengruppe, so ist P normal in G oder G hat eine normale 3-Sylowgruppe. Ist P eine Diedergruppe, so ist dies i.a. nicht richtig.

(60) Die endliche Gruppe G habe eine 2-Sylowgruppe P der Ordnung 4. Ist P zyklisch, so ist G 2-nilpotent. Ist P nicht zyklisch, so ist G genau dann 2-nilpotent, wenn die drei Elemente der Ordnung 2 in P konjugiert sind in G.