Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 20.11.2006

Übungen zur Gruppentheorie (6)

(21) Ist G eine Gruppe der Ordnung $|G| = p^2q^2$ mit Primzahlen $p \neq q$, so hat G eine normale p-Sylowgruppe oder eine normale q-Sylowgruppe. ($|G| = 2^2 3^2$ bedarf einer Sonderbetrachtung !)

(22) Sei p eine Primzahl und $G = A(1,p)$ die *affine Gruppe* von $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, die Gruppe aller Abbildung $t \mapsto at + b$ mit $0 \neq a \in \mathbb{F}_p$, $b \in \mathbb{F}_p$ ($t \in \mathbb{F}_p$). Die Translationen $t \mapsto t + b$ bilden einen regulären Normalteiler P (scharf transitiv auf $\mathbb{F}_p$) von G, die Streckungen $t \mapsto at$ eine (zyklische) Untergruppe G_0 (=Stabilisator von 0), die regulär auf $\mathbb{F}_p^* = \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ operiert. Es ist $G = P \rtimes G_0$ (scharf) 2-transitiv auf $\mathbb{F}_p$.

(23) Sei $G = X \times Y$ das direkte Produkt zweier Gruppen X, Y. Sei X_0 eine Untergruppe von G derart, dass (auch) $G = X_0 \times Y$ ist. Warum ist X_0 normal in G und $X_0 \cong X$? Zu jedem $x \in X$ gibt es genau ein $y_x \in Y$, so dass $x \cdot y_x \in X_0$ gilt. Man zeige, dass $x \mapsto y_x$ ein Homomorphismus von X in das Zentrum $Z(Y)$ ist. (Ist also $Z(Y) = 1$, so ist $X_0 = X$.)

(24) Sei N ein zentraler Normalteiler der Gruppe G ($N \leq Z(G)$) und $\bar{G} = G/N$.
(a) Ist $\bar{G}$ zyklisch, so ist G abelsch.
(b) Ist $\bar{G}$ abelsch aber G nicht abelsch, so gibt es kein Komplement zu N in G.
(c) Ist $\bar{G}$ endlich abelsch und $y \mapsto y^{|\bar{G}|}$ eine Bijektion auf N, so ist G abelsch.