Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Tübingen, den 27.11.2006

Übungen zur Gruppentheorie (7)

(25) Die *Diagonale* $D = \{(g,g) | \; g \in G\}$ ist eine Untergruppe des direkten Produkts $G \times G$ der Gruppe G mit sich selbst. Man berechne den Normalisator $N_{G\times G}(D)$ (als die Menge der Paare (x,y) mit $x, y \in G$ und $xy^{-1} \in Z(G)$) und zeige $N_{G\times G}(D) = D$, falls das Zentrum $Z(G) = 1$ ist.

(26) Die endliche Gruppe X operiere auf der endlichen Gruppe Y durch Automorphismen.
(a) Ist X eine p-Gruppen für eine Primzahl p, so gibt es eine X-invariante p-Sylowgruppe von Y.
(b) Ist $|X|$ teilerfremd zu $|Y|$, so hat Y eine X-invariante p-Sylowgruppe für jeden Primteiler p von $|X|$ (Schur-Zassenhaus).

(27) Die Gruppe $G = D_4 \times Z_2$ ist nilpotent der Klasse 2. Man gebe sämtliche maximalen Untergruppen von G an.

(28) Hat die Gruppe G die Ordnung $|G| = pqr$ mit Primzahlen p, q, r, so hat G eine normale Sylowgruppe $\neq 1$.