Universität Tübingen
Mathematisches Institut Tübingen, den 15.01.2007

Einige Aufgaben zur Gruppentheorie

(21) Sei $|G| = p^2q^2$ mit Primzahlen $p > q$ (oBdA). Sei etwa $P \in Syl_p(G)$ nicht normal in G. Nach Sylow ist $|Syl_p(G)| = |G : N_G(P)| \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p)$, und hier $|G : N_G(P)| = q$ oder q^2. Wegen $p > q$ folgt $p \mid q + 1$, mithin $p = 3$, $q = 2$. Sei $P_0 = \mathrm{Core}_G(P)$. Da G/P_0 isomorph zu einer Untergruppe von S_4 ist, folgt $|P_0| = 3$ und $G/P_0 \cong A_4$. Sei $Q \in Syl_2(G)$. Dann ist also $QP_0/P_0 \cong V_4$ ein Normalteiler von G/P_0. Damit $N = QP_0 \lhd G$ und $G = N \cdot N_G(Q)$ nach dem Frattini-Argument. Wäre $N_G(Q) \neq G$, so wäre $|G : N_G(Q)| = 3$ und G hätte einen Normalteiler mit Index 2. Dies ist nicht möglich wegen $N_G(P) = P$. (Mit Burnside (9.7) folgt aus $N_G(P) = C_G(P)$ direkt die p-Nilpotenz von G.)

(38) Sei $G = \langle g_1, \cdots, g_r\rangle$ und $H \leq G$ mit $|G : H| = n$. Es gibt eine Rechtstransversale $t_1 = 1, t_2, \cdots, t_n$ zu H in G derart, dass $t_{i+1} = t_i g_{i_j}$ gilt für $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ und geeignete $g_{i_j} \in \{g_1, \cdots, g_r\}$. Sei $\varphi : G \to H \,\mathrm{wr}\, \mathrm{S_n} = \mathrm{M_n(H)}$ die Frobenius-Einbettung bzgl. $\{t_i\}$ (8.5). Wegen $t_1 = 1$ wird jedem $h \in H$ eine Blockmatrix $\varphi(h)$ zugeordnet, die in der Position $(1, 1)$ den Eintrag h hat und sonst in der ersten Zeile und der ersten Spalte nur Nullen. Seien $y_1, \cdots, y_N$ die verschiedenen Elemente $\neq 1$ von H, die als Einträge in $\varphi(g_1), \cdots, \varphi(g_r)$ vorkommen. Da jedes $\varphi(h)$ Potenzprodukt in den $\varphi(g_j^{\pm 1}) = \varphi(g_j)^{\pm 1}$ ist, ist $H = \langle y_1, \cdots, y_N\rangle$. Es ist $N \leq rn$, sogar $N \leq rn - (n - 1)$, denn in den Matrizen $\varphi(g_1), \cdots, \varphi(g_r)$ tritt $n - 1$ mal das Element 1 auf.

(40) Sei $P \in Syl_2(G)$, $X \leq P$ mit Index 2 und $x \in P$ eine Involution mit $x^G \cap X = \varnothing$. Da $|P\backslash G| = |G : P|$ ungerade ist, hat x auf $P\backslash G$ Fixpunkte, etwa $Pt_1, \cdots, Pt_r$ mit ungeradem r. Dann $t_i x t_i^{-1} \in P \setminus X$. Ist Pt kein Fixpunkt von x, so ist $Ptx \neq Pt$ und $tx^2t^{-1} = 1$. Nach der Standardformel (8.7) ist also $V_P^G(x) = P' \prod_{i=1}^{r} t_i x t_i^{-1}$ nicht in X/P'. Insbesondere ist $O^2(G) \neq G$.

(43) Sei G p-nilpotent, $P \in Syl_p(G)$ und $Z(P)^g \leq P$ für ein $g \in G$. Sei $N = O_{p'}(G) = O^p(G)$ das normale p-Komplement in G. Dann $G/N \cong P$ und $Z(P)N \trianglelefteq G$. Also $Z(P)^g = P \cap (Z(P)^g N) = P \cap (Z(P)N)^g = P \cap Z(P)N = Z(P)$.

(44) Sei p der kleinste Primteiler von $|G|$. Sei $p^3 \nmid |G$ aber G nicht p-nilpotent. Dann ist jedes $P \in Syl_p(G)$ abelsch, aber nicht zyklisch (9.8). Also ist P elementarabelsch der Ordnung p^2 und $|\mathrm{Aut}(P)| = (p^2 - 1)(p^2 - p)$ (11.3). Ist p ungerade, so ist keine der Zahlen p, $p - 1$, $p + 1$ durch eine Primzahl $q > p$ teilbar. Wegen $C_G(P) \geq P$ ist also $N_G(P) = C_G(P)$, wenn p ungerade ist. Aber dann wäre G p-nilpotent nach Burnside (9.7). Also ist $p = 2$ und $|N_G(P)/C_G(P)| = p + 1 = 3$. Damit ist $2^2 \cdot 3 = 12$ ein Teiler von $|G|$.