Tübingen, den 14.1.2003 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

B l a t t 12

Abgabe am Dienstag, den 21.1.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 34

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y''(t) = -y(t)\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$

1. Man forme die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung mit $x(t){:}= y'(t)$ um. Sodann formuliere man ein äquivalentes Anfangswertproblem für die komplexwertige Funktion $z(t){:}= x(t) + iy(t)$ und finde eine lokale Lösung für z durch Trennung der Variablen (Hauptzweig des Logarithmus).
2. Man bestimme explizit eine lokale Lösung der Anfangswertprobleme aus 1. für (x, y) bzw. für z mit Hilfe des Iterationsverfahrens nach Picard-Lindelöf.
3. Für welche $t \in \mathbb{R}$ konvergiert die Iteration gegen eine Lösung? Für welche $c > 0$ folgt die gleichmäßige Konvergenz (nach geeigneter Wahl von Konstanten $M, L \geq 0$ entsprechend der Formulierung des P-L-Satzes in der Vorlesung) auf dem Intervall $[0, c]$?

Aufgabe 35

Gegeben sei die Differentialgleichung $x' = 1 + x^2$.

1. Man berechne die allgemeine Lösung $\varphi(t; t_0, x_0)$ und insbesondere den zugehörigen Definitionsbereich in $\mathbb{R}^3$.
2. Man löse das zugehörige lokale Anfangswertproblem $x(0) = 0$ mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes.

Aufgabe 36

Für eine offene Teilmenge $D \subset \mathbb{R} \times V$ und eine stetige Funktion $f{:}\, D \to V$ sei die Differentialgleichung

$$(*) \qquad x' = f(t, x)$$

gegeben. Ferner sei $\tau{:}\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Diffeomorphismus. Man gebe eine offene Teilmenge $\widetilde{D} \subset \mathbb{R} \times V$ und eine Differentialgleichung

$$(**) \qquad y' = g(t, y)$$

mit einer stetigen Funktion $g{:}\, \widetilde{D} \to V$ so an, daß gilt: *φ ist genau dann Lösung von $(*)$, wenn $\varphi \circ \tau$ Lösung von $(**)$ ist,* wobei

1. $\tau(t) = -t$ (Zeitumkehr),
2. τ beliebig.