Tübingen, den 21.1.2003 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

B l a t t 13

Abgabe am Dienstag, den 28.1.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 37

Ein Hund schwimmt in einem geradlinigen Fluß (dessen konstante Strömungsgeschwindigkeit u betrage) mit der relativ zum umgebenden Wasser konstanten Geschwindigkeit v auf seinen direkt am Ufer stehenden Herrn zu.

1. Man stelle die Differentialgleichung für die Bahnkurve des Hundes auf.
2. Man bestimme diese Bahnkurve.

Aufgabe 38

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^1$-Funktion mit $|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)| \leq 5$ für alle $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

1. Man zeige, daß jede maximale Lösung φ der Differentialgleichung $x' = f(t,x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist.
2. In einem (genau rechnenden) Computer wird statt der Anfangsbedingung $\varphi(0) = a$ die Bedingung $\varphi(0) = b$ eingegeben. Wie groß darf $|b-a|$ höchstens sein, damit die Abweichungen der berechneten Lösung φ in $t = 1$ $(t = 2,\ t = 3)$ vom richtigen Wert höchstens $\frac{1}{10}$ beträgt.

Aufgabe 39

Sei $\mathbb{C}^2 := \{(z,w) : z,w \in \mathbb{C}\}$ und $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ eine (reell) stetig differenzierbare Funktion. Für jedes offene $U \subset \mathbb{C}$ und jede holomorphe Funktion $h: U \to \mathbb{C}$ werde vorausgesetzt, daß auch die Funktion $f(z,h(z))$ holomorph auf U sei. (Das ist sicher dann erfüllt, wenn f eine holomorphe Funktion der komplexen Variablen (z,w) ist.)
Man zeige: Zu jedem $(z_0,w_0) \in \mathbb{C}^2$ existiert ein $r > 0$ und eine auf $U := \{|z-z_0| < r\}$ eindeutig bestimmte holomorphe Funktion φ mit $\varphi'(z) = f(z,\varphi(z))$ für alle $z \in U$ und $\varphi(z_0) = w_0$.

[Hinweis: Man interpretiere $\varphi_{k+1}(z) := w_0 + \int\limits_{z_0}^{z} f(z,\varphi_k(z))dz$.]