Tübingen, den 28.1.2003 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

B l a t t 14

Abgabe am Dienstag, den 4.2.2003, in der Vorlesung

Aufgabe 40

Es sei $f : V \to V$ ein lokal Lipschitz-stetiges Vektorfeld auf $V = \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $S \subset V$ werde eine *Integralmenge* des Vektorfeldes f genannt, wenn für jede Lösung $\varphi : I \to V$ der Differentialgleichung $x' = f(x)$ mit $\varphi(I) \cap S \neq \emptyset$ bereits $\varphi(I) \subset S$ gilt. Man zeige für jedes beschränkte Gebiet $D \subset V$ mit abgeschlossener Hülle $\overline{D}$ und Rand $\partial D = \overline{D} \backslash D$:

$$D \text{ Integralmenge } \iff \overline{D} \text{ Integralmenge } \iff \partial D \text{ Integralmenge}\,.$$

Aufgabe 41

Mit den Bezeichnungen der Vorlesung bestimme für die Differentialgleichung $x' = 1 - x^2$ auf $U = V = \mathbb{R}$

1. für jedes $a \in U$ die maximale Lösung $\varphi_a : I_a \to U$ mit $\varphi_a(0) = a$,
2. den zugehörigen (lokalen) Fluß $\Phi : G \to U$ und skizziere $G \subset \mathbb{R}^2$,
3. für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $g^t : U^t \to U$.

Aufgabe 42

$V := \mathbb{C}$ werde als reeller Vektorraum aufgefaßt. Man skizziere für das Vektorfeld
$f : V \to V$ das zugehörige Phasenbild,
wobei $a \in \mathbb{C}^*$ und $f(z) = az$, $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = z^3$, $f(z) = e^{i|z|}z$.