Tübingen, den 12.11.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

B l a t t 5

Abgabe am Dienstag, den 19.11.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 13

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ fest gegeben. Man bestimme die Menge aller Werte des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{(z-a)(z-b)} \quad ,$$

wobei γ alle stückweise glatten, geschlossenen Kurven in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ durchläuft.

Aufgabe 14

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und f eine auf D holomorphe Funktion mit $\tan(f(z)) = z$ für alle $z \in D$ (genannt *Zweig des Arcustangens* auf D).

1. Man berechne $f'(z)$ und zeige $D \subset \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$.
2. Auf $D := \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Re}(z) \neq 0 \text{ oder } |\mathsf{Im}(z)| < 1\}$ existiert genau eine holomorphe Funktion f mit $f(0) = 0$ und $\tan(f(z)) \equiv z$. (Hauptzweig des Arcustangens.)

Aufgabe 15

Aus der reellen Analysis sei bekannt, daß die reelle Funktion $\arctan(x)$ Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist und deshalb insbesondere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx \;=\; \pi$$

gilt. Man gebe einen alternativen Beweis für diese Identität unter Verwendung des Cauchyschen Integralsatzes an.
[Hinweis: $1 + z^2 = (z-i)(z+i)$. Berechne für $K_r := \{z \in \mathbb{C} : \mathsf{Im}(z) \geq 0,\ |z - i| \leq r\}$ das Integral

$$\int_{\partial K_r} \frac{1}{1+z^2}\, dz \quad \text{und schätze} \quad \int_{-r}^{r} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

dagegen ab.]

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\tan(z) := \begin{cases} \frac{\sin(z)}{\cos(z)} & \text{falls } \cos(z) \neq 0 \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei ∞ ein Symbol sei, das von jeder komplexen Zahl verschieden ist.