Tübingen, den 3.12.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2002/3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS III

Blatt 8

Abgabe am Dienstag, den 10.12.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 22

Sei $f(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1} & \text{für } z \neq 0 \\ 1 & \text{für } z = 0 \end{cases}$.

1. Man zeige, daß f in einer Umgebung von $0 \in \mathbb{C}$ eine Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ besitzt.
2. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum c_n z^n$.
3. Man gebe eine Formel an, mit der sich die Koeffizienten c_n rekursiv *explizit* berechnen lassen.

Aufgabe 23

1. Seien $D \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in D$ und f eine auf $D \setminus \{a\}$ holomorphe Funktion, die im Punkte a einen Pol der Ordnung 2 hat. Man zeige:
$$g(z) := (z-a)^2 f(z)\,, \quad z \in D \setminus \{a\}\,,$$
ist holomorph in a fortsetzbar und $\mathsf{Res}_f(a) = g'(a)$.
2. Man berechne
$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^{iz}\,dz}{z(z^2+1)^2}\,.$$

Aufgabe 24

Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet und $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ eine endliche Menge von Punkten in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Für jeden Punkt p in der abgeschlossenen Hülle $\overline{D}$ von D sei $f(p)$ das Produkt aller euklidischen Abstände von p zu $p_1, p_2, \ldots, p_r$.

1. Man zeige, daß f auf $\overline{D}$ – aber nicht auf D – das Maximum (Minimum) annimmt.
2. Welche der beiden Aussagen in (1) gelten für beschränkte Gebiete $D \subset \mathbb{R}$ entsprechend?

[Hinweis: Maximumprinzip]