Tübingen, den 16.10.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 1

Abgabe am Montag, den 22.10.2001, in der Vorlesung

Aufgabe 1

Für jedes $q \in \mathbb{N}$ mit $q > 0$ sei $q\mathbb{Z} := \{qn : n \in \mathbb{Z}\}$ die Menge aller ganzen Zahlen, die durch q teilbar sind. Man gebe eine möglichst übersichtliche Beschreibung der Mengen

(i) $6\mathbb{Z} \cap 15\mathbb{Z}$,

(ii) $\{n + m : n \in 6\mathbb{Z}, m \in 15\mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 2

Sei $g \geq 2$ eine ganze Zahl und setze $q := g - 1$. Man zeige:

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $g^n - 1$ durch q teilbar.

- (a) Durch vollständige Induktion nach n [Hinweis: $g^{n+1} - 1 = (g^n - 1)g + g - 1$]
- (b) Durch "Raten" der g-al-Darstellung des Quotienten $(g^n - 1)/(g - 1)$.

(ii) Ist $m \in \mathbb{N}$ und $(a_n a_{n-1} \dots a_0)_g$ die g-al-Darstellung von m, so ist m genau dann durch q teilbar, wenn die g-al-Quersumme $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ durch q teilbar ist. (Für $g = 10$ und $q = 9$ sollte diese Aussage wohlbekannt sein.)

Aufgabe 3

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei $s(m)$ die Anzahl der injektiven Abbildungen $\{0, 1\} \to M$, wobei M eine Menge ist, die genau m Elemente enthält. Man zeige für alle $m \in \mathbb{N}$:

(i) $s(m + 1) = s(m) + 2m$,

(ii) $s(m) = m(m - 1)$ durch vollständige Induktion nach m unter Verwendung von (i).

Hinweis auch für zukünftige Aufgabenblätter:
(1) Sollte eine der zu beweisenden Behauptungen (beabsichtigt oder unbeabsichtigt) nicht wahr sein, so ist dieses zu bemerken und gegebenenfalls durch ein Gegenbeispiel zu belegen.
(2) Die Formulierung "genau dann, wenn" entspricht dem Doppelpfeil $\iff$. Es sind dazu also 2 Richtungen zu zeigen.