Tübingen, den 4.2.2002 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 15

Abgabe am Montag, den 11.2.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 43

Sei $R = \mathbb{K}[X]$ der Polynomring über einem beliebigen Körper $\mathbb{K}$.

1. Man zeige: Es gibt genau eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\delta : R \longrightarrow R$ mit $\delta(X) = 1$ und $\delta(p \cdot q) = \delta(p) \cdot q + p \cdot \delta(q)$ für alle $p, q \in R$. [Hinsweis: Bestimme $\delta(X^n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$]
2. Man bestimme den Kern von δ.

Aufgabe 44

Es seien V ein reeller Vektorraum und $\varphi, \psi \in \mathsf{End}(V)$ Endomorphismen. Dann heiße

$$[\varphi, \psi] := \varphi\psi - \psi\varphi \in \mathsf{End}(V)$$

der *Kommutator* von φ und ψ. Man zeige:

1. Ist V endlichdimensional, so kann der Fall $[\varphi, \psi] = \mathsf{id}_V$ nicht auftreten. [Hinweis: Stelle φ, ψ durch Matrizen dar und verwende Aufgabe 20]
2. Für $V := \mathbb{R}[X]$ seien $\delta \in \mathsf{End}(V)$ wie in Aufgabe 43 und $\theta \in \mathsf{End}(V)$ durch

$$\theta(p) := X \cdot p, \quad p \in V,$$

definiert. Man bestimme $[\delta, \theta]$.

Aufgabe 45

Man bestimme den ggT d der Polynome

$$p : = X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$$
$$q : = X^3 + 3X^2 - X - 3$$

in $\mathbb{K}[X]$, sowie $r, s \in \mathbb{K}[X]$ mit $d = rp + sq$, falls:

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$

Die Klausur zur Vorlesung findet am Donnerstag, 7. Februar 2002, in den Räumen N6 (Anfangsbuchstaben A - M) und N7 (Anfangsbuchstaben N - Z) von 18 bis 20 Uhr statt. Es dürfen keine Hilfsmittel wie Telefone, Rechner, Skripten, Bücher, Schreibpapier mitgebracht werden – Papier wird gestellt. Einlaß ab 17:50; Ausweis nicht vergessen!