ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 3

Abgabe am Montag, den 5.11.2001, in der Vorlesung

Aufgabe 7

Es sei $(G, \circ)$ eine *endliche* Halbgruppe mit neutralem Element. Man zeige, daß die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $(G, \circ)$ ist eine Gruppe.

(ii) In der zugehörigen Verknüpfungstafel kommt in jeder Zeile und auch in jeder Spalte jedes Element von G genau einmal vor.

(iii) Für alle $a, b, c \in G$ mit $a \circ c = b \circ c$ oder $c \circ a = c \circ b$ gilt $a = b$ (Kürzungsregeln).

Gilt die Äquivalenz auch, wenn auf die Endlichkeit von G verzichtet wird?

Aufgabe 8

Man zeige für die Permutationsgruppe $G = S_3$:

(i) $G = \{e, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_1, \sigma_2\}$, wobei e das neutrale Element, $\tau_i(i) = i$ für $i = 1, 2, 3$ und $\sigma_1 = \tau_1 \circ \tau_2$ ist. Wie wirkt die Permutation σ_2?

(ii) Man gebe die Verknüpfungstafel für G explizit an.

(iii) Welche Permutation ist $\tau_1^7 \circ \sigma_1^8 \circ \tau_1^9 \circ \sigma_2^{10}$? (Für jedes $g \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Potenz $g^n \in G$ induktiv definiert durch: $g^0 = e,\ g^{n+1} = g \circ g^n$.)

Aufgabe 9

Mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 8 zeige man

(i) $N := \{e, \sigma_1, \sigma_2\}$ ist ein Normalteiler in S_3.

(ii) Durch $\varphi(g) := \begin{cases} 1 & g \in N \\ -1 & g \notin N \end{cases}$ wird ein Gruppenhomomorphismus von S_3 auf die multiplikative Gruppe $\{1, -1\}$ definiert.

(iii) Ist $\psi : S_3 \to \mathbb{R}^*$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\psi(\tau_1) \neq 1$, so gilt $\psi = \varphi$. ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sei die multiplikative Gruppe aller reellen Zahlen $\neq 0$.)

Die Übungsblätter sind auch über das Internet erhältlich unter der Adresse
`http://www.mathematik.uni-tuebingen.de/ab/KA/uebungen/uebungen.html`