Tübingen, den 12.11.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

**ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I**

Blatt 5

Abgabe am Montag, den 19.11.2001, in der Vorlesung

## Aufgabe 13

Es sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Die Elemente von $V$ mögen auch 'Punkte' genannt werden. Eine Teilmenge $L \subset V$ heiße eine 'Gerade', wenn Elemente $x, y \in V$ existieren mit $y \neq 0$ und

$$L = \{x + ty : t \in \mathbb{K}\}\,.$$

Man zeige

(i) Durch je zwei verschiedene Punkte $a, b \in V$ geht genau eine Gerade $L$ (das soll heißen $a, b \in L$).

Für den Rest der Aufgabe werde $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 2$ vorausgesetzt, d.h. also $\frac{1}{2} \in \mathbb{K}$. Für je zwei Punkte $a, b \in V$ heiße $\frac{1}{2}(a+b) \in V$ der 'Mittelpunkt' von $a$ und $b$.
Es seien nun Punkte $a, b, c \in V$ gegeben, die auf keiner Geraden gemeinsam liegen. Das Tripel dieser Punkte werde im folgenden 'Dreieck' in $V$ mit den Ecken $a, b, c$ genannt. Jede Gerade durch eine Ecke und den Mittelpunkt der beiden übrigen Ecken werde 'Seitenhalbierende' des Dreiecks genannt.

(ii) Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$, $V = \mathbb{K}^2$ und $a = (0,0)$, $b = (2,0)$, $c = (0,2)$ bestimme man alle Seitenhalbierenden dieses Dreiecks und untersuche, ob sie einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen.

(iii) Gilt zusätzlich $\mathrm{Char}(\mathbb{K}) \neq 3$, so werde $s := \frac{1}{3}(a+b+c)$ der 'Schwerpunkt' des Dreiecks genannt. Man zeige, daß $s$ auf jeder Seitenhalbierenden des Dreiecks liegt, und daß insbesondere sich alle Seitenhalbierenden des Dreiecks genau in einem Punkt schneiden.

## Aufgabe 14

Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{Q}^3$. Man untersuche, welche der Vektoren

$$v_1 = (1,2,1),\ v_2 = (1,1,1),\ v_3 = (3,5,2),\ v_4 = (2,5,3)$$

Linearkombination der übrigen 3 Vektoren in $V$ sind, und gebe jeweils eine Linearkombination explizit an.

## Aufgabe 15

Es sei $\mathbb{K}$ beliebiger Körper und $V = \mathbb{K}^2$. Man zeige, daß die Vektoren $x = (a,b)$ und $y = (c,d)$ in $V$ genau dann linear abhängig sind, wenn $ad = bc$ gilt.