Tübingen, den 26.11.2001 Prof. Kaup Wintersemester 2001/2

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 7

Abgabe am Montag, den 3.12.2001, in der Vorlesung

Aufgabe 19

(i) Man zeige, daß $K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterring von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist, der zum Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen isomorph ist.

(ii) Man zeige, daß für die Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gilt:

$$K = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : AJ = JA\}.$$

Aufgabe 20

Sei R ein kommutativer Ring. Für jede quadratische Matrix $C = (c_{jk}) \in R^{m\times m}$ werde $\mathsf{Sp}(C) := \sum_{j=1}^{m} c_{jj} \in R$ die *Spur* von C genannt. Man zeige:

1. Für alle $A \in R^{m\times n}$ und alle $B \in R^{n\times m}$ gilt $\mathsf{Sp}(AB) = \mathsf{Sp}(BA)$.
   Für den Spezialfall $m = n$ und A invertierbar folgere man daraus

$$\mathsf{Sp}(ABA^{-1}) = \mathsf{Sp}(B).$$

2. Für jedes $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in R^{2\times 2}$ werde $\det(A) := ad - bc \in R$ die *Determinante* von A genannt. Man zeige:

(i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für alle $A, B \in R^{2\times 2}$ und insbesondere

$$\det(ABA^{-1}) = \det(B),$$

falls A invertierbar ist.

(ii) $A \in R^{2\times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \in R$ invertierbar ist [Hinweis: Betrachte $\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)$]

Aufgabe 21

Man führe die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{5\times 6}$$

in Zeilenstufenform über und bestimme den Zeilenrang von A für

(i) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, (ii) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$.