ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 11

Abgabe am Montag, den 1.7.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 31 Der Zeilenraum $\mathbb{C}^4$ sei mit der (Standard) hermiteschen Form

$$(z|w) := \sum_{j=1}^{4} z_j \overline{w}_j, \qquad z = (z_1, \ldots, z_4), \quad w = (w_1, \ldots, w_4),$$

versehen. U sei der von den Vektoren $a_1 = (-1, i, 0, 1)$, $a_2 = (i, 0, 2, 0)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

1. Man bestimme eine Orthogonalbasis $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ von $U^\perp$.
2. Man ergänze $(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$ zu einer Orthogonalbasis $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ von $\mathbb{C}^4$ mit $\varepsilon_1 = a_1$.

Aufgabe 32 Man fasse die folgenden Matrizen als hermitesche Formen auf und bestimme ihren Typ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 3 \\ 1-i & 2 & 2-i \\ 3 & 2+i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3},$$

$C = (c_{jk}) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit $c_{jk} := \frac{1}{j+k-1}$ für $1 \le j, k \le 4$.

Aufgabe 33 Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sei $A = (a_{jk}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix. Man beweise oder widerlege:

1. A ist genau dann positiv semidefinit, wenn $E_n + tA$ positiv definit ist für alle reellen Zahlen $t \ge 0$.
2. Ist A negativ definit, so ist $\det(A)$ negativ.
3. Gilt $a_{jj} > 0$ für alle j, so ist A positiv definit.
4. Es gibt eine positiv definite (bzw. semidefinite) Matrix $B = (b_{jk}) \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $b_{14} = 2i$ und $b_{jj} = j$ für alle j.

.... Wiederholungsaufgaben für Informatiker ....

(I) Die Fibonacci-Zahlen werden induktiv durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ sowie $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle $n \ge 1$ definiert.

1. Man bestimme eine Matrix $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ so, daß $F^n\binom{0}{1} = \binom{f_n}{f_{n+1}} \in \mathbb{R}^2$ für alle $n \ge 1$ gilt, wobei F^n die n-te Potenz von F ist.
2. Man bestimme eine Diagonalmatrix $D := \binom{\alpha 0}{0 \beta}$ sowie eine invertierbare Matrix R in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\alpha > \beta$ und $F = RDR^{-1}$.
2. Man folgere aus 1 und 2 die *Binetsche Formel*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

(J) Für jedes $n \ge 1$ sei die Matrix $A_n := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben, d.h. für die Einträge a_{jk} von A_n gelte: $a_{jk} = 1$ falls $j - k = 0, 1$, sowie $a_{jk} = -1$ falls $k - j = 1$ und $a_{jk} = 0$ sonst. Man zeige $\det(A_n) = f_{n+1}$, wobei f_{n+1} die in **I** definierte Fibonacci-Zahl ist. (Induktion nach n!)

(K) Man bestimme die Eigenwerte, die Eigenräume, die verallgemeinerten Eigenräume sowie die Jordansche Normalform der rechtsstehenden Matrix. [Hinweis: Man lese aus der Gestalt der Matrix unmittelbar einen Eigenwert ab.] $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.