ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 12

Abgabe am Montag, den 8.7.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 34 Es seien $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ eine beliebige Matrix vom Rang r und Φ die durch die Blockmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad n = p+q,$$

definierte hermitische Form auf $\mathbb{C}^n$. Man zeige:

1. Die Matrix $A^*A \in \mathbb{C}^{q\times q}$ ist hermitesch, positiv semidefinit und hat ebenfalls Rang r.
2. Φ hat den Typ (r,r). [Hinweis: Betrachte Vektoren der Form $\binom{\lambda x}{Ax} \in \mathbb{C}^n$ mit λ^2 Eigenwert von A^*A und $x \in \mathbb{C}^p$.]

Aufgabe 35 Man bestimme alle Möglichkeiten, die folgenden Fragezeichen so durch komplexe Zahlen zu ersetzen, daß unitäre Matrizen entstehen:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & ? \\ (1-i)/\sqrt{3} & ? \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & i/\sqrt{2} & ? \\ -i/2 & -1/\sqrt{2} & ? \\ (1-i)/2 & 0 & ? \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & ? & ? \\ ? & 1 & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Aufgabe 36

1. Man zeige: Zu jeder Matrix $A \in \mathsf{GL}(n,\mathbb{C})$ gibt es eine unitäre Matrix $Q \in \mathsf{U}(n)$ und eine obere Dreiecksmatrix R mit positiven Diagonalelementen derart, daß $A = QR$ gilt. [Hinweis: Fasse die Spalten der Matrix A als Basis von $\mathbb{C}^n$ auf und wende das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an].
2. Man stelle die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -i & -2 & 6+2i \\ 1-i & -(1+i) & 5+i) \end{pmatrix}$$
als Produkt $A = QR$ wie in 1. dar.

.... WIEDERHOLUNGSAUFGABEN FÜR INFORMATIKER ....

(L) Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, φ ein Endomorphismus von V und $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ eine Familie von $n \geq 2$ Vektoren in V. Man beweise oder widerlege:

1. $\mathcal{A}$ ist linear unabhängig, wenn jedes v_j Eigenvektor von φ ist und v_j, v_k für alle $j \neq k$ linear unabhängig sind.
2. $\mathcal{A}$ ist linear unabhängig, wenn jedes v_j Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ_j ist mit $\lambda_j \neq \lambda_k$ für alle $j \neq k$.
3. $\mathcal{A}$ ist linear unabhängig, wenn jede echte Teilfamilie von $\mathcal{A}$ linear unabhängig ist.

(M) Es sei $V \subset \mathbb{R}[X]$ der Unterraum aller Polynome vom Grad ≤ 4 und $\varphi \in \mathsf{End}(V)$ die übliche Ableitung (d.h. $\varphi(f) = f'$).

1. Man bestimme alle Eigenwerte und alle zyklischen Vektoren von φ.
2. Man bestimme die Jordansche Normalform des Endomorphismus φ^2 (zweite Ableitung).

(N) Für $A := \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ berechne man die Potenz A^{1000}.