Tübingen, den 8.7.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 13

Abgabe am Montag, den 15.7.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 37 Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$ zeige man:

1. Es existieren eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_q)$ von $\mathbb{C}^q$ und eindeutig bestimmte reelle Zahlen $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_q \geq 0$ mit $A^*Av_j = \lambda_j^2 v_j$ für $j = 1, \ldots, q$.
2. Ist $q \leq p$, so existiert eine Orthonormalbasis $(w_1, \ldots, w_p)$ von $\mathbb{C}^p$ mit $Av_j = \lambda_j w_j$ für $j = 1, \ldots, q$.
3. Es existieren unitäre Matrizen $P \in \mathsf{U}(p)$ und $Q \in \mathsf{U}(q)$ mit $A = PDQ$, wobei $D = (d_{jk}) \in \mathbb{R}^{p\times q}$ die durch $d_{jk} = \lambda_j\delta_{jk}$ definierte (rechteckige) Diagonalmatrix ist. [Hinweis: Man verwende unitäre Matrizen, die die Orthonormalbasen $(v_1, \ldots, v_q)$ und $(w_1, \ldots, w_p)$ in die jeweiligen Standardbasen überführen und reduziere den Fall $q > p$ auf den Fall $q < p$, z.B. vermöge Transposition.]

[PDQ heißt die *Singulärwertzerlegung von* A; die positiven unter den λ_j heißen die *Singulärwerte* der Matrix A.]

Aufgabe 38 Es sei $H^+ \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ die Teilmenge aller positivdefiniten hermiteschen Matrizen. Man zeige:

1. H^+ ist ein konvexer Kegel, d.h. $tA \in H^+$ und $(A + B) \in H^+$ für alle $A, B \in H^+$ und alle $t > 0$.
2. Zu jedem $A \in H^+$ existiert genau ein $B \in H^+$ mit $B^2 = A$.
3. Jede Matrix $A \in \mathsf{GL}(n, \mathbb{C})$ hat eindeutige Zerlegungen $A = PU = \widetilde{U}\widetilde{P}$ mit $P, \widetilde{P} \in H^+$ positivdefinit und $U, \widetilde{U} \in \mathsf{U}(n)$ unitär. [Genannt Links- und Rechts-Polarzerlegung. Zum Beweis betrachte man insbesondere die Matrix A^*A.]

Aufgabe 39 Es sei $H \subset \mathbb{C}^{n\times n}$ der $\mathbb{R}$-lineare Teilraum aller hermiteschen Matrizen. Man zeige:

1. Für jede reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert genau eine Abbildung $\boldsymbol{f} : H \to H$ mit $\boldsymbol{f}(A)z = f(\lambda)z$ für alle $A \in H$, alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle Eigenvektoren $z \in \mathbb{C}^n$ von A zum Eigenwert λ.
2. Ist $h = fg$ das Produkt der reellen Funktionen f und g, so gilt $\boldsymbol{h}(A) = \boldsymbol{f}(A)\boldsymbol{g}(A)$ für alle $A \in H$. Ist $h = f \circ g$, so gilt auch $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$.
3. Für die übliche Exponentialfunktion exp auf $\mathbb{R}$ liefert $\mathbf{exp}$ eine Bijektion $\mathbf{exp} : H \to H^+$. Zudem gilt

$$\mathbf{exp}\,(A + B) = (\mathbf{exp}\,A)(\mathbf{exp}\,B)$$

für alle $A, B \in H$ mit $AB = BA$. [Statt $\mathbf{exp}\,A$ wird häufig auch e^A geschrieben. Zum Beweis betrachte simultane Eigenwerte von A und B.]

4* [Anleihe bei der Analysis; fakultativ.] Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und m_f die durch

$$m_f(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & x \neq y \\ f'(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$ (Differenzenquotient), so existiert für jedes $A = (a_{jk}) \in H$ und jede Diagonalmatrix $D = (\lambda_j\delta_{jk}) \in H$ die Matrix

$$C = \lim_{t\to 0} \frac{\boldsymbol{f}(D + tA) - \boldsymbol{f}(D)}{t} \in H\,,$$

und es gilt $C = (c_{jk})$ mit $c_{jk} = m_f(\lambda_j, \lambda_k)\cdot a_{jk}$ (d.h. also, daß die matrixwertige Funktion $t \mapsto \boldsymbol{f}(D+tA)$ auf $\mathbb{R}$ in $t = 0$ differenzierbar ist und dort die Matrix C als Ableitung besitzt).

*** ENDE ***