ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 5

Abgabe am Mittwoch, den 22.5.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 13

Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{4\times 4}$$

diagonalisierbar, falls

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
2. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

Gegebenenfalls bestimme man eine Basis von $\mathbb{K}^4$ aus Eigenvektoren.

Aufgabe 14

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

1. A ist über $\mathbb{R}$ trigonalisierbar aber nicht diagonalisierbar.
2. Man bestimme ein $S \in \mathsf{GL}(3, \mathbb{R})$ so, daß SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. (Hinweis: Man finde eine geeeignete Basis für jede Primärkomponente von $\mathbb{R}^3$ bzgl A).
3. Ist A trigonalisierbar über $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 15

Es seien V, W Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $\varphi : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Ferner seien $V_0 \subset V$, $W_0 \subset W$ Untervektorräume und $\pi_V : V \longrightarrow \widetilde{V}$, $\pi_W : W \longrightarrow \widetilde{W}$ die kanonischen Projektionen, wobei $\widetilde{V} := V/V_0$ und $\widetilde{W} := W/W_0$ gesetzt sei.. Man zeige:

1. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   i. $\varphi(V_0) \subset W_0$.
   ii. Es gibt eine lineare Abbildung $\widetilde{\varphi} : \widetilde{V} \longrightarrow \widetilde{W}$ mit $\pi_W \circ \varphi = \widetilde{\varphi} \circ \pi_V$.
2. Existiert die Abbildung $\widetilde{\varphi}$ in 1.ii, so ist sie durch φ, V_0 und W_0 eindeutig bestimmt. $\widetilde{\varphi}$ ist genau dann injektiv (bzw. surjektiv), falls $\varphi^{-1}(W_0) = V_0$ (bzw. $\varphi(V) + W_0 = W$) gilt.