Tübingen, den 22.5.2002 Prof. Kaup Sommersemester 2002

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 6

Abgabe am Montag, den 27.5.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 16

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, I eine endliche Menge und $V_i \subset V$, $i \in I$, Untervektorräume mit $V = \sum_{i \in I} V_i$ (d.h. jedes $v \in V$ hat eine Darstellung $v = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in I$). Man zeige, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$ (d.h. im Falle $I \neq \emptyset$ hat jedes $v \in V$ eine *eindeutige* Darstellung $v = \sum_{i \in I} v_i$ mit $v_i \in V_i$ für alle $i \in I$).
2. Für jedes $i \in I$ gilt $V_i \cap \left(\sum_{j \neq i} V_j \right) = 0$.

(Anmerkung: Für $I = \emptyset$ sei $\bigoplus_{i \in I} V_i := 0$ für die leere direkte Summe.)

Aufgabe 17

Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension, $\varphi, \psi \in \mathsf{End}(V)$ diagonalisierbare Operatoren mit $\varphi\psi = \psi\varphi$ und $T := \langle \varphi, \psi \rangle$ der lineare Aufspann in $\mathsf{End}(V)$. Man zeige:

1. $V_{\kappa,\lambda} := V_\kappa(\varphi) \cap V_\lambda(\psi)$ ist τ-invariant für alle $\tau \in T$ und alle $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$.
2. Für jede Linearform $\omega \in T^*$ und $V_\omega := \{v \in V : \tau(v) = \omega(\tau)v \text{ für alle } \tau \in T\}$ gilt $V_\omega = V_{\kappa,\lambda}$ für geeignete $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$.
3. Die Menge Ω aller $\omega \in T^*$ mit $V_\omega \neq 0$ ist endlich, und es gilt $V = \bigoplus_{\omega \in \Omega} V_\omega$.

(Anmerkung: Für jeden Endomorphismus π von V und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ bezeichnet $V_\lambda(\pi)$ den λ-Eigenraum von π in V.)

Aufgabe 18

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in \mathbb{K}^{5\times 5}$ eine Matrix mit

$$\chi_A = (X-1)^2(X+1)(X-4)^2$$

1. Man entscheide, welche der folgenden Polynome als Minimalpolynom μ_A auftreten können, und belege dieses gegebenenfalls durch ein explizites Beispiel:
   i. $X^2 - 1$ für $K = \mathbb{R}$
   ii. $X^2 - 1$ für $K = \mathbb{Z}_3$
   iii. $X^4 - 5X^3 + 3X^2 + 5X - 4$ für $K = \mathbb{R}$
   iv. $X^4 - 3X^3 - 5X^2 + 3X + 4$ für $K = \mathbb{Q}$.
2. In welchen der Fälle i – iv lassen sich sogar für A zwei nicht-ähnliche Beispiele finden?