ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 7

Abgabe am Montag, den 3.6.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 19

Es seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume (nicht notwendig von endlicher Dimension). Ferner seien $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to V$ lineare Abbildungen. Man zeige

1. Die Eigenwerte $\neq 0$ der Endomorphismen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ stimmen überein.
2. Die Spektralwerte $\neq 0$ der Endomorphismen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ stimmen überein. [Hinweis: Man zeige $(\psi \circ \varphi - \lambda\,\mathsf{id}_V)^{-1} = \lambda^{-1}\big(\psi \circ (\varphi \circ \psi - \lambda\,\mathsf{id}_W)^{-1} \circ \varphi - \mathsf{id}_V\big)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}^*$, die nicht Spektralwert von $\varphi \circ \psi$ sind.]

Aufgabe 20

Für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$ zeige man:

1. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so ist A entweder diagonalisierbar oder ähnlich zu einer Matrix $\left(\begin{smallmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{smallmatrix}\right)$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so ist A genau dann trigonalisierbar, wenn $(\mathsf{Sp}A)^2 \geq 4\det(A)$ ist, wobei Sp die Spur bedeutet.

Aufgabe 21

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonalelementen a_{ii}. Ferner sei $D \in \mathbb{K}^{n\times n}$ diejenige Diagonalmatrix, die die gleichen Diagonalelemente wie A besitzt. Man zeige, daß die Matrizen A, D ähnlich sind, und zwar

1. Mit einem theoretischen Argument unter Verwendung geeigneter Sätze aus der Vorlesung.
2. Auf konstruktive Weise durch Angabe eines Algorithmus, der eine obere Dreiecksmatrix $R = (r_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ liefert mit $RAR^{-1} = D$ und $r_{ii} = 1$ für alle i. [Hinweis: Stelle für jede Zeile der gesuchten Matrix R ein lineares Gleichungssystem auf.]