ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

B l a t t 9

Abgabe am Montag, den 17.6.2002, in der Vorlesung

Aufgabe 25 Es seien V, W $\mathbb{K}$-Vektorräume, $\Phi : V \times W \longrightarrow \mathbb{K}$ eine nichtausgeartete Sesquilinearfunktion bzgl. der Involution $\sigma \in \mathsf{Aut}(\mathbb{K})$ und $(V_i)_{i\in I}$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Man zeige:

1. $\big(\sum\limits_{i\in I} V_i\big)^\perp = \bigcap\limits_{i\in I} V_i^\perp$.
2. $\sum\limits_{i\in I} V_i^\perp \subset \big(\bigcap\limits_{i\in I} V_i\big)^\perp$.
3. Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\sum\limits_{i\in I} V_i^\perp = \big(\bigcap\limits_{i\in I} V_i\big)^\perp$.

Aufgabe 26 Es seien $W := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Vektorraum aller reellen Folgen $x = (x_n)$ und $V := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \{(x_n) \in W : x_n = 0 \text{ für fast alle } n\}$. Man zeige:

1. Durch $\Phi(x, y) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n y_n$ für $x = (x_n) \in V$, $y = (y_n) \in W$ wird eine nichtausgeartete Bilinearfunktion $\Phi : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert.
2. Für den Untervektorraum $V \subset W$ gilt $(V^\perp)^\perp = W$.
3. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ sei $V_j := \{x = (x_n) \in V : x_i = 0 \text{ für alle } i \le j\}$. Dann gilt $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} V_j^\perp \ne \big(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} V_j\big)^\perp$.

Aufgabe 27 Es seien $V := \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon = \pm 1$. Für alle $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in V$ wird durch $\Phi_\varepsilon(x, y) := x_1 y_1 + \varepsilon x_2 y_2$ eine symmetrische Bilinearform auf V definiert.

1. Man zeige, daß Φ_ε nichtausgeartet ist. Man skizziere für $\alpha = 0, \pm 1$ die Menge
$$L_\varepsilon(\alpha) := \{x \in V : \Phi_\varepsilon(x, x) = \alpha\}.$$
2. Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ bestimme man den zu
$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \in \mathsf{End}(V)$$
adjungierten Operator $\widehat{R}_\alpha$ bzgl. Φ_ε

……………………. WIEDERHOLUNGSAUFGABEN FÜR INFORMATIKER …………………….

(C) Man führe die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ in Zeilenstufenform über und bestimme ihren Rang. Ferner gebe man eine Basis des Zeilenraumes in $\mathbb{R}^5$ und eine Basis des Spaltenraumes in $\mathbb{R}^4$ an.

(D) Welche der folgenden reellen Matrizen sind invertierbar? Man bestimme gegebenenfalls die inverse Matrix und ihre Determinante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & -8 & -1 \\ 1 & 16 & 16 & 1 \end{pmatrix}.$$

(E) Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ Matrizen vom Rang m. Man zeige für den Rang r der Produktmatrix AB:

1. $r \le m$.
2. $r \ge 2m - n$.
3. Für jedes $p \in \mathbb{N}$ mit $2m - n \le p \le m$ kommt der Fall $r = p$ vor (konkrete Matrizen A, B angeben).

[Hinweis: Man betrachte die Matrizen als Endomorphismen von $\mathbb{K}^n$ und studiere den Kern von B sowie das Bild von A.]