

## Algebra I Übungsblatt 13

### Aufgabe 55:

Sei  $p$  eine Primzahl, sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $q = p^n$ . Zeigen Sie:

- Der Zerfällungskörper von  $x^q - x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$  besitzt  $q$  Elemente.
- Bis auf Isomorphie existiert genau ein Körper mit  $q$  Elementen. Er wird mit  $\mathbb{F}_q$  bezeichnet.
- Jeder endliche Körper ist isomorph zu genau einem Körper des Typs  $\mathbb{F}_q$ .

### Aufgabe 56:

Sei  $\mathbb{F}_q$  der endliche Körper mit  $q = p^n$  Elementen, wobei  $p$  eine Primzahl und  $n \in \mathbb{N}$  ist. Zeigen Sie:

- $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$  ist eine Galoiserweiterung.
- Der Frobenius-Automorphismus  $\mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{F}_q, a \mapsto a^p$  erzeugt die Galoisgruppe von  $\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p$ , d.h.  $\text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p)$  ist eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n$ .

### Aufgabe 57:

Entscheiden Sie, welche der folgenden Winkel sich mit Zirkel und Lineal dritteln lassen:

- $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ,
- $\alpha_2 = \frac{\pi}{5}$ ,
- $\alpha_3 = \frac{\pi}{12}$ .

### Aufgabe 58:

Entscheiden Sie, für welche  $n \leq 50$  der Winkel  $\frac{\pi}{n}$  mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.

### Aufgabe 59:

Sei der Winkel  $\alpha = \frac{\pi}{7}$  gegeben. Entscheiden Sie, für welche  $n \in \mathbb{N}$  sich der Winkel  $\frac{\pi}{n}$  aus  $\alpha$  mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt.