Prof. Dr. W. Gubler
Ch. Christensen

Abgabe in den Übungen bis Mittwoch, 13.01.2010

Algebra I
Übungsblatt 9

Aufgabe 37:
Sei R ein faktorieller Ring und $f \in R[x] \setminus \{0\}$ ein primitives Polynom, d.h. $v_p(f) = 0$ für alle Primelemente $p \in R$. Zeigen Sie:

a) Sei S ein Integritätsbereich und $\varphi : R[x] \longrightarrow S$ ein Ringhomomorphismus, der kein Polynom positiven Grades auf eine Einheit in S abbildet. Ist dann $\varphi(f)$ irreduzibel in S, so ist f irreduzibel in $R[x]$.
b) Sei $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in R$ und $p \in R$ ein Primelement mit $p \nmid a_n$. Ist das Polynom $[a_n]x^n + \cdots [a_1]x + [a_0]$ irreduzibel in $(R/\langle p \rangle)[x]$, so ist f irreduzibel in $R[x]$.
c) Für jedes $a \in R$ ist $f(x + a)$ genau dann irreduzibel in $R[x]$, wenn $f(x)$ irreduzibel in $R[x]$ ist.

Aufgabe 38:
Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Das Polynom $f(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$.
[Hinweis: Betrachten Sie zunächst das Polynom $f(x + 1)$.]
b) Die folgenden Polynome sind in den jeweiligen Ringen irreduzibel:
   i) $x^5 + 4x^4 - 8x + 6 \in \mathbb{Q}[x]$,
   ii) $x^3 + 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$,
   iii) $x^2 + 2x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$,
   iv) $y^3 + (x + 1)^2 y + x^2 - 1 \in \mathbb{Q}[x, y]$.

Aufgabe 39:
Sei p eine Primzahl und K ein Körper der Charakteristik p. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : K \longrightarrow K$ mit $\varphi(a) = a^p$ für alle $a \in K$ ein Körperhomomorphismus ist.

Aufgabe 40:

a) Zeigen Sie, dass jedes Polynom in $\mathbb{R}[x]$ mit ungeradem Grad eine reelle Nullstelle besitzt.
b) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome in $\mathbb{R}[x]$.

Aufgabe 41
Geben Sie ein Beispiel eines Körpers, für den es ein Polynom gibt, das alle Körperelemente als Nullstellen hat.

Aufgabe 42
Finden Sie $f \in \mathbb{Q}[x]$ mit Nullstelle $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Für alle die sie schon vermisst haben. Hier die Aufgabe 31:

Das Weihnachtsrätselchen:
Frodo, Sam, Pippin und Merry stecken in einem finsteren unterirdischen Labyrinth fest. Sie können nur (maximal) zu zweit den Ausgang erreichen und brauchen paarweise verschieden lange dafür. Die Niete Frodo braucht glatte 5 Stunden, Sam 4 Stunden, Pippin 2 Stunden und Merry nur 1 Stunde. Eine Zweiergruppe ist natürlich nur so schnell, wie das langsamste Mitglied. Ohne Licht ist es unmöglich sich in dem so finsteren Labyrinth fortzubewegen. Die Vier besitzen eine Fackel, die noch für 12 Stunden Licht spendet. In ca. $12^1/_2$ Stunden stürmt eine Horde Orks (im Auftrag von Sauron) das Labyrinth. Wie entkommen die Vier noch rechtzeitig dem Ansturm?

⋆

Wir
wünschen
allen Hörerinnen
und
Hörern
Frohe Weihnachten
und ein gutes neues Jahr
2010!