

# Seminar in Algebra: Bewertungstheorie

Prof. Dr. Walter Gubler

2. Juli 2009

Der Betrag der reellen Zahlen ist von grundlegender Bedeutung für die Analysis. Die Theorie der Bewertungen überträgt dieses Konzept axiomatisch auf beliebige Körper. Ein neues Beispiel einer Bewertung erhält man durch die Multiplizität einer rationalen Funktion in einem gegebenen Punkt, was Anwendungen in der algebraischen Geometrie und der komplexen Funktionentheorie hat. Ein analoges Beispiel aus der Zahlentheorie ist die Multiplizität einer gegebenen Primzahl  $p$  in der Primfaktorisation einer Zahl. Dies wird uns zu den  $p$ -adischen Zahlen führen. Dieser neue Zahlbereich ist die Vervollständigung der rationalen Zahlen bezüglich dieses neuen  $p$ -adischen Betrags. Wir werden dann mit algebraischen Methoden die Fortsetzungen einer gegebenen Bewertung auf eine endliche Körpererweiterung studieren. Ein Hauptresultat des Seminars ist die Klassifikation aller nicht-diskreten lokal kompakten Körper. Zum Schluss werden wir die Höhe algebraischer Zahlen einführen, die eine wichtige Rolle in der diophantischen Geometrie und in der Transzendenztheorie spielt.

Voraussetzungen: Mindestens Algebra 1, besser auch Algebra 2.

Zeit und Ort: Dienstag 16-18, C3 M2

## Literatur

- [BG] E. Bombieri, W. Gubler: *Heights in diophantine geometry*. Cambridge University Press.
- [Jac] N. Jacobson: *Basic Algebra II*. W. H. Freeman & Company.
- [Neu] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer Verlag.

## Vortragsliste zum Seminar über Bewertungstheorie

1. Die  $p$ -adischen Zahlen: [Neu], II.1.
2. Der  $p$ -adische Absolutbetrag: [Neu], II.2.
3. Absolutbeträge: [Jac], 9.1 (ohne Beispiele).
4. Eigenschaften der Absolutbeträge: [Jac], 9.2 und 9.3.
5. Die Vervollständigung: [Jac], 9.4.
6. Endliche Erweiterungen vollständiger Körper: [Neu], II.4 (ab II.4.6, Definition und relevante Eigenschaften der Norm aus I.2).
7. Die Fortsetzungen einer Bewertung: [Neu], II.8 (bis und mit 1. Teil von Korollar II.8.4, aber Satz 8.3 weglassen).
8. Verzweigungsindex und Restklassengrad: [Jac], 9.10.
9. Lokale Körper: [Jac], Theorem 9.16 mit Vorbereitung und Beweis.
10. Produktformel bei Zahlkörpern: [BG] 1.3.6, 1.3.7, 1.4.1–1.4.4.
- 11.+12. Die Höhe einer algebraischen Zahl: [BG], alles aus 1.5 zu algebraischen Zahlen.

### Bemerkungen

- Die Vorträge 1, 2 und 5 eignen sich besonders für Lehramtsstudierende, weil sie den Aspekt der Zahlbereichserweiterung aus einer neuen Perspektive betrachten.
- Da ich erst am 1. Oktober an der Universität Tübingen beginne, wende man sich bei Fragen per Email an [walter.gubler@uni-dortmund.de](mailto:walter.gubler@uni-dortmund.de).

### Literatur

- [BG] E. Bombieri, W. Gubler: *Heights in diophantine geometry*. Cambridge University Press.
- [Jac] N. Jacobson: *Basic Algebra II*. W. H. Freeman & Company.
- [Neu] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer Verlag.