Funktionalanalysis

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Räume

1.1 Definition

In dieser Vorlesung werden nur Vektorräume über $\mathbb{C}$ betrachtet. Viele Aussagen gelten auch ueber $\mathbb{R}$. Die lassen sich dann meist aus der komplexen Version folgern.

Definition 1.1.1. Ein **normierter Vektorraum** ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einer Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ so dass für $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

- $\|v\| = 0 \;\Leftrightarrow\; v = 0$ (Definitheit)
- $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|$ (Multiplikativität)
- $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung).

Mit der Metrik

$$d(v, w) = \|v - w\|$$

wird V dann ein metrischer Raum. Ein normierter Raum, der vollständig ist, in dem also jede Cauchy-Folge konvergiert, heisst **Banach-Raum**.

Beispiele 1.1.2. (a) Ist X ein topologischer Raum, dann ist der Vektorraum $C_b(X)$ aller beschränkten stetigen Funktionen $f : X \to \mathbb{C}$ ein Banach-Raum mit der Norm

$$\left\|f\right\|_X = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

Beweis. Die Normeigenschaften sind trivial. Es ist Vollständigkeit zu zeigen. Sei also (f_j) eine Cauchy-Folge. Dann gilt für jedes $x \in X$,

$$|f_j(x) - f_k(x)| \le \sup_{y\in X} |f_j(y) - f_k(y)| = \left\|f_j - f_k\right\|_X .$$

Also ist $(f_j(x))_{j\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, konvergiert also. Nennen wir den Limes $f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es j_0 so dass für alle $j, k \ge j_0$ und alle $x \in X$ gilt

$$|f_j(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Mit $k \to \infty$ folgt, dass für jedes $j \ge j_0$ und jedes $x \in X$ gilt

$$|f_j(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Das bedeutet aber, dass f_j gleichmässig gegen f konvergiert. Wir zeigen, dass f stetig ist. Hierzu muessen wir zeigen, dass es zu gegebenem $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x gibt, so dass $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Um dies zu zeigen, beachte, dass es ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Da f_j stetig ist, gibt es eine offene Umgebung U von x, so dass $|f_j(x) - f_j(u)| < \varepsilon/3$ fuer jedes $u \in U$

gilt. Dann ist fuer jedes $u \in U$

$$|f(x) - f(u)| \le |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(u)| + |f_j(u) - f(u)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Damit folgt, dass f stetig ist.

Es ist leicht einzusehen, dass f auch beschränkt ist, also $f \in C_b(X)$, womit die Vollständigkeit gezeigt wäre. □

(b) Für jedes $1 \le p \le \infty$ und jeden Maßraum (X, μ) ist $L^p(\mu)$ ein Banach-Raum. Der Beweis gehoert in die Analysis 3 und findet sich in meinem Buch zur Analysis.

Hier zwei Saetze aus der Topologie, die wir spaeter benutzen werden:

Satz 1.1.3 (Tychonov). *Seien X_i, $i \in I$ topologische Raeume. Der Produktraum $X = \prod_{i \in I} X_i$ ist genau dann kompakt, wenn alle Faktoren X_i kompakt sind.*

Definition 1.1.4. Fuer einen topologischen Raum X schreiben wir $C(X)$ fuer den Vektorraum aller stetigen Funktionen $X \to \mathbb{C}$. Ist X kompakt, dann wird $C(X)$ durch die Norm

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

ein Banach-Raum, also ein vollstaendiger normierter Raum.

Satz 1.1.5 (Satz von Stone-Weierstraß).
Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und sei $A \subset C(X)$ ein multiplikativ abgeschlossener Untervektorraum, so dass

(a) *A trennt Punkte,*

(b) *für jedes $x \in X$ gibt es ein $f \in A$ so dass $f(x) \neq 0$ und*

(c) *ist $f \in A$, dann liegt auch die komplex konjugierte Funktion $\overline{f}$ in A.*

Dann ist A dicht im Banach-Raum $C(X)$.

Die Beweise finden sich in meinem Buch zur Analysis.

* * *

1.2 Stetige lineare Abbildungen

Definition 1.2.1. Für lineare Abbildung $T : V \to W$ zwischen normierten Räumen sei

$$\|T\|_{\text{op}} = \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \in [0,\infty]$$

die **Operatornorm**. Die Abbildung T heisst **beschränkte lineare Abbildung**, falls $\|T\|_{\text{op}} < \infty$.

Man spricht statt von einer linearen Abbildung auch von einem **linearen Operator**. Ist der Zielraum W gleich $\mathbb{C}$, so nennt man T ein **lineares Funktional**.

Satz 1.2.2. (a) *Die Operatornorm ist eine solche, d.h. es gilt*

- $\|T\| = 0 \Leftrightarrow T = 0$ *(Definitheit)*
- $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$ *(Multiplikativität)*
- $\|S + T\| \le \|S\| + \|T\|$ *(Dreiecksungleichung).*

(b) *Sind S, T komponierbar, so gilt*

$$\|S \circ T\| \le \|S\|\,\|T\|.$$

(c) *Für jeden linearen Operator $T : V \to W$ zwischen normierten Räumen und jedes $v \in V$ gilt*

$$\|T(v)\| \le \|T\|_{\text{op}}\,\|v\|.$$

Ein linearer Operator T ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.

Beweis. Für die Dreiecksungleichung rechnen wir

$$\begin{aligned}\|S+T\| &= \sup_{\|v\|=1} \|(S+T)(v)\| = \sup_{\|v\|=1} \|S(v) + T(v)\| \\ &\le \sup_{\|v\|=1} \|S(v)\| + \|T(v)\| \le \sup_{\|v\|=1} \|S(v)\| + \sup_{\|v\|=1} \|T(v)\| = \|S\| + \|T\|.\end{aligned}$$

(b) Es sei ohne Einschränkung $T \neq 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}\|S \circ T\| &= \sup_{v\neq 0} \frac{\|S(T(v))\|}{\|v\|} = \sup_{T(v)\neq 0} \frac{\|S(T(v))\|}{\|v\|} \\ &= \sup_{T(v)\neq 0} \frac{\|S(T(v))\|}{\|T(v)\|}\frac{\|T(v)\|}{\|v\|} \le \sup_{w\neq 0} \frac{\|S(w)\|}{\|w\|} \sup_{v\neq 0} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \|S\|\,\|T\|.\end{aligned}$$

(c) Die Ungleichung ist klar. Wir zeigen zunächst, dass eine lineare Abbildung $T : V \to W$ zwischen normierten Räumen genau dann stetig ist, wenn sie im Nullpunkt stetig ist. Ist T stetig, dann ist T stetig in Null. Sei umgekehrt T linear und stetig in Null. Sei $v_j \to v$ eine in V konvergente Folge, dann konvergiert $v_j - v$ gegen Null, also konvergiert auch $T(v_j) - T(v) = T(v_j - v)$ gegen Null, d.h. $T(v_j)$ geht gegen $T(v)$, somit ist T in v stetig und da v beliebig ist, ist T schlechthin stetig.

Wir zeigen, dass ein stetiger Operator beschränkt ist. Sei also T stetig und **nimm an**, er ist nicht beschränkt. Dann existiert eine Folge v_j von Vektoren mit $\left\|v_j\right\| = 1$ und $\left\|T(v_j)\right\| \to \infty$. Nehmen wir an, dass $\left\|T(v_j)\right\| \neq 0$ für alle j, dann geht die Folge $\frac{1}{\left\|T(v_j)\right\|} v_j$ gegen Null, also folgt

$$\frac{1}{\left\|T(v_j)\right\|} T(v_j) = T\left(\frac{1}{\left\|T(v_j)\right\|} v_j\right) \to 0.$$

Diese Vektoren haben aber Norm 1, **Widerspruch!** Sei umgekehrt T beschränkt und v_j eine Nullfolge, das heisst, dass $\left\|v_j\right\|$ gegen Null geht. Dann gilt

$$\left\|T(v_j)\right\| \le \|T\|_{\mathrm{op}} \left\|v_j\right\| \to 0.$$

Also geht $T(v_j)$ gegen Null, T ist also stetig in Null, also stetig. □

* * *

1.3 Das Lemma von Zorn

Definition 1.3.1. Eine **partielle Ordnung** auf einer Menge M ist eine Relation $\le$ auf M so dass für alle $x, y, z \in M$ gilt

(a) $x \le x$ (Reflexivität)

(b) $x \le y,\ y \le x \quad \Rightarrow \quad x = y$ (Antisymmetrie)

(c) $x \le y,\ y \le z \quad \Rightarrow \quad x \le z$ (Transitivität)

Beispiele 1.3.2. (a) Auf jeder Menge ist die Identität "=" eine partielle Ordnung.

(b) Auf der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist die übliche "kleiner gleich" Relation eine partielle Ordnung. Desgleichen für $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

(c) Ist X irgendeine Menge. Auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ liefert die Mengeninklusion eine partielle Ordnung.

Definition 1.3.3. Eine partiell geordnete Menge $(M, \le)$ heißt **vollständig geordnet** oder **linear geordnet**, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind. Also wenn für je zwei Elemente x, y mit $x \neq y$ entweder $x \le y$ oder $y \le x$ gilt.

Beispiele 1.3.4. (a) Die Identität "=" auf M ist genau dann linear, wenn die Menge höchstens ein Element hat.

(b) Die natürliche Ordnungen auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind alle linear.

(c) Die Ordnung auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ ist in der Regel nicht linear. (Nur dann, wenn $|X| \le 1$)

Lemma 1.3.5 (Lemma von Zorn)**.** *Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Existiert zu jeder linear geordneten Teilmenge $L \subset M$ eine obere Schranke $s \in M$, dann hat M maximale Elemente.*

Hierbei ist $s \in M$ eine **obere Schranke** zu $L \subset M$, wenn $x \leq s$ für jedes $x \in L$ gilt.

Ferner heißt ein Element $m \in M$ **maximales Element**, wenn $m \leq x \ \Rightarrow \ m = x$ gilt.

Die Bedingung, dass jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, wird auch **Kettenbedingung** genannt. Diese Sprechweise kommt daher, dass linear geordnete Teilmengen auch Ketten genannt werden.

Das Lemma von Zorn kann man nicht beweisen. Es ist aequivalent zum Auswahlaxiom der Mengenlehre, kann also selbst als Axiom betrachtet werden.

Lemma 1.3.6.
(a) *Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzaehlbar, es gibt also eine surjektive Abbildung $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.*

(b) *Für jede unendliche Menge I gilt $|I| = |I \times \mathbb{N}|$.*

Beweis. (a) Eine abzaehlbare Vereinigung $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ endlicher Mengen ist abzaehlbar, denn man kann zuerst die Elemente von E_1 durchnummerieren, dann die von E_2, wobei man bei der Indexzahl $|E_1| + 1$ anfaengt und so fort. Sei nun $E_n = \left\{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : i + j = n\right\}$. Dann ist jedes E_n endlich und $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ist abzaehlbar.

(b) Die Projektion $I \times \mathbb{N} \to I$ ist surjektiv. Wir müssen nur zeigen, dass es eine surjektive Abbildung $I \to I \times \mathbb{N}$ gibt. Wir benutzen das Lemma von Zorn. Sei S die Menge aller surjektiven Abbildungen $\psi : T \to T \times \mathbb{N}$, wobei T eine Teilmenge von I ist. Die Menge S ist nichtleer, denn man kann eine abzaehlbar unendliche Teilmenge $T \subset I$ waehlen. Dann gibt es eine Bijektion $T \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}$. Wir koennen also so tun, als sei $T = \mathbb{N}$ und damit liefert T ein Element von S nach Teil (a).

Wir ordnen S partiell durch $(\psi, T) \leq (\psi', T')$ falls $T \subset T'$ und ψ' eine Fortsetzung von ψ ist. Die Vereinigung ist eine obere Schranke zu jeder linear geordneten Teilmenge, also liefert das Lemma von Zorn ein maximales Element (ψ, T). Wir behaupten, dass $T = I$ ist. Ist $T \neq I$ und ist $I \setminus T$ endlich, dann existiert eine Bijektion zwischen I und T und durch Vor- und Nachschalten dieser kann man ψ nach I transportieren und hat das Lemma bewiesen. Ist $I \setminus T$ unendlich, enthält es eine abzählbar unendliche Teilmenge B und man hat eine surjektive Abbildung $B \to B \times \mathbb{N}$, die man mit ψ zusammenstecken kann um eine Erweiterung von ψ zu erhalten, ein Widerspruch! □

* * *

1.4 Basen beliebiger Vektorräume

Wir benutzen das Lemma von Zorn, um zu zeigen, dass jeder Vektorraum ueber jedem Koerper eine Basis hat. Das schliesst die unendlich-dimensionalen Raeume ein.

Definition 1.4.1. (a) Sei V ein K-Vektorraum und sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren. Eine **Linearkombination** der v_i ist eine Summe der Gestalt

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i,$$

wobei fast alle Koeffizienten $\lambda_i \in K$ gleich Null sind. Hierbei heißt **fast alle** dasselbe wie *alle, bis auf endlich viele*.

(b) Die Menge aller Linearkombinationen schreiben wir als

$$\mathrm{Spann}(v_{i\in I}).$$

Dies ist ein Untervektorraum von V.

(c) Die Familie heißt **linear unabhängig**, falls jede Linearkombination der Null bereits trivial ist, also wenn aus $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$ schon folgt, dass alle Koeffizienten λ_i gleich Null sind.

(d) Eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i\in I}$ heißt **Erzeugendensystem** von V, falls sich jeder Vektor von V als Linearkombination der v_i schreiben lässt, also wenn $V = \mathrm{Spann}(v_{i\in I})$ gilt.

(e) Eine **Basis** oder auch **Hamel-Basis** ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

Satz 1.4.2. (a) *Ein minimales Erzeugendensystem ist eine Basis.*

(b) *Ein maximales linear unabhängiges System ist eine Basis.*

(c) *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Genauer enthält jedes Erzeugendensystem eine Basis und jedes linear unabhängige System kann zu einer Basis erweitert werden.

Beweis. (a) Sei $(v_i)_{i\in I}$ ein minimales Erzeugendensystem und sei

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0$$

eine Linearkombination der Null. *Angenommen*, ein Koeffizienten λ_{i_0} ist ungleich Null. Dann folgt

$$v_{i_0} = \sum_{i\neq i_0} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} v_i,$$

daher ist die Familie $(v_i)_{i\neq i_0}$ immer noch ein Erzeugendensystem, was der Minimalität *Widerspricht!* Wegen des Widerspruchs müssen alle Koeffizienten λ_i gleich Null sein.

(b) Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine linear unabhängige Familie und sei $v \in V$ mit $v \notin \mathrm{Spann}(v_{i\in I})$. Wie in LinA1 zeigt man, dass dann die um v erweiterte Familie ebenfalls linear unabhängig ist. Eine maximale linear unabhängige Familie muss daher ein Erzeugendensystem sein.

(c) Wir benutzen Zorns Lemma, indem wir zeigen, dass es eine maximale linear unabhängige Familie gibt. Sei M die Menge aller linear unabhängigen Familien, partiell geordnet durch

$$(v_i)_{i\in I} \leq (w_j)_{j\in J}$$

genau dann, wenn $I \subset J$ und $v_i = w_i$ für alle $i \in I$. Sei $L \subset M$ eine linear geordnete Teilmenge. Wir konstruieren eine obere Schranke $s = (v_\nu)_{\nu\in N}$ wie folgt: Sei A die Vereinigung aller Mengen I, die als Indexmengen von Elementen $(v_i)_{i\in I} \in L$ auftreten, also

$$A := \bigcup_{I:\exists (v_i)_{i\in I}\in L} I.$$

Für jedes $\nu \in A$ gibt es ein $(v_i)_{i\in I} \in L$ so dass $\nu = i$ für ein $i \in I$ gilt. Definiere dann $v_\nu = v_i$. Da L linear geordnet ist, ist dies wohldefiniert und wir erhalten ein Element $(v_\nu)_{\nu\in A}$, welches eine obere Schranke zu L ist.

Nach dem Lemma von Zorn existiert also eine maximale linear unabhängige Familie, d.h., eine Basis.

Ebenso sieht man, dass ein gegebenes Erzeugendensystem eine maximale linear unabhängige Teilfamilie enthält. Diese muss dann eine Basis sein.

Auch zeigt das Lemma von Zorn, dass es zu einem gegebenen linear unabhängigen System eine maximale linear unabhängige Erweiterung gibt. Die muss dann ebenfalls eine Basis sein. □

Satz 1.4.3. *Je zwei Basen eines Vektorraums V sind gleichmächtig. Zwei Vektorräume V und W sind genau dann isomorph, wenn sie Basen gleicher Mächtigkeit haben. Die Mächtigkeit einer Basis wird die* **Dimension** *des Vektorraums genannt.*

Beweis. Der Satz ist in der LA1 bewiesen worden, falls V endlich-dimensional ist. Sei also V unendlich-dimensional. Seien $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Basen. Für jedes $i \in I$ gibt es genau eine Darstellung

$$v_i = \sum_{j\in J} \lambda_{i,j} w_j.$$

Für $i \in I$ sei $E(i) \subset J$ die Menge aller $j \in J$ mit $\lambda_{i,j} \neq 0$. Dann ist $E(i)$ stets endlich und $J = \bigcup_{i\in I} E(i)$. Sei $E(i) = \{j_{i,1}, \dots\}$ eine Aufzählung der Elemente, bei der Elemente mehrfach vorkommen (müssen!). Definiere die Abbildung

$$\begin{aligned} \phi : I \times \mathbb{N} &\to J, \\ (i,k) &\mapsto j_{i,k}. \end{aligned}$$

Dann ist ϕ surjektiv. Da es nach Lemma 1.3.6 eine Surjektive Abbildung $I \to I \times \mathbb{N}$ gibt, gibt es insgesamt eine surjektive Abbildung $I \to J$. Aus Symmetriegründen gibt es auch eine Surjektion $J \to I$ und damit eine Bijektion $I \to J$.

Für die zweite Aussage des Satzes ist Sei $\phi : V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist das Bild einer Basis eine Basis und daher bleibt die Mächtigkeit derselben erhalten. Seien umgekehrt $(v_i)_{i\in I}$ und $(w_j)_{j\in J}$ Basen gleicher Mächtigkeit, dann können wir I und J vermittels einer Bijektion identifizieren und $I = J$ annehmen. Die Abbildung $v_i \mapsto w_i$ setzt sich in eindeutiger Weise zu eine linearen Bijektion $V \to W$ fort. □

* * *

1.5 Hilbert-Räume

Erinnerung: Ein **Skalarprodukt** auf einem komplexen Vektorraum V ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Für $w \in V$ ist die Abbildung $V \to \mathbb{C}; v \mapsto \langle v, w\rangle$ linear.
- Es gilt $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle}$ für alle $v, w \in V$.
- Für $v \in V$ ist $\langle v, v\rangle \geq 0$ und $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Definition 1.5.1. Ein Vektorraum V mit einem Skalarprodukt $\langle ., .\rangle$ heisst **Prä-Hilbert-Raum**.

Beispiele 1.5.2. (a) Das einfachste Beispiel nach dem Nullraum ist $V = \mathbb{C}$ mit $\langle\alpha, \beta\rangle = \alpha\overline{\beta}$. Oder allgemeiner $V = \mathbb{C}^k$ mit $k \in \mathbb{N}$ und

$$\langle v, w\rangle = v^t\overline{w},$$

(b) Sei I eine Menge und sei $\ell^2(I)$ der L^2-Raum, wenn man I mit dem Zählmaß ausstattet. Dann ist $\ell^2(I)$ die Menge aller Funktionen $f : I \to \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{i\in I} |f(i)|^2 < \infty.$$

Insbesondere ist für jedes $f \in \ell^2(I)$ die Menge $\{i \in I : f(i) \neq 0\}$ abzählbar. Das Skalarprodukt ist gegeben durch

$$\langle f, g\rangle = \sum_{i\in I} f(i)\overline{g(i)}.$$

Definition 1.5.3. Die **Norm** auf einem Prä-Hilbert-Raum V ist definiert durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}, \qquad v \in V.$$

In der linearen Algebra wird bewiesen, dass dies in der Tat eine Norm ist. Ausserdem wird dort die **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|$$

für $v, w \in V$ bewiesen.

Lemma 1.5.4. (a) *Ist V ein normierter Raum, dann ist die Norm $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung.*

(b) *Ist V ein Prä-Hilbert-Raum, dann ist das Skalarprodukt $V \times V \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung.*

Beweis. (a) Es sei $v_j \to v$ eine konvergente Folge, dann ist $| \left\| v_j \right\| - \|v\| | \leq \left\| v_j - v \right\|$ eine Nullfolge.

(b) Ist V ein Hilbert-Raum und sind $v_j \to v$ und $w_j \to w$ konvergent in V, so gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle v_j, w_j \right\rangle - \langle v, w \rangle \right| &\leq \left| \left\langle v_j, w_j \right\rangle - \left\langle v_j, w \right\rangle \right| + \left| \left\langle v_j, w \right\rangle - \langle v, w \rangle \right| \\ &= \left| \left\langle v_j, w_j - w \right\rangle \right| + \left| \left\langle v_j - v, w \right\rangle \right| \\ &\leq \left\| v_j \right\| \left\| w_j - w \right\| + \left\| v_j - v \right\| \|w\| \end{aligned}$$

Da $\left\| v_j \right\|$ konvergent ist, ist diese Folge beschränkt, also geht die rechte Seite (und damit die linke) gegen Null. ◻

Definition 1.5.5. Ein **Hilbert-Raum** ist ein Prä-Hilbert-Raum, der vollständig bzgl der induzierten Norm ist.

Proposition 1.5.6. *Jeder endlich-dimensionale Prä-Hilbert-Raum ist vollständig, also ein Hilbert-Raum.*

Beweis. In der Linearen Algebra wird gezeigt, dass jeder endlich-dimensionale Prä-Hilbert-Raum zu $\mathbb{C}^n$ isomorph ist, wobei n die Dimension ist. Dieser Raum ist vollständig. ◻

Definition 1.5.7. Seien V, W, Z komplexe Vektorraeume. Eine **sesquilinieare** Abbildung $b : V \times W \to Z$ ist eine Abbildung, die folgende Axiome erfuellt:

(a) Fuer jedes $w \in V$ ist die Abbildung $v \mapsto b(v, w)$ linear.

(b) Fuer jedes $v \in V$ ist die Abbildung $w \mapsto b(v, w)$ antilinear.

Satz 1.5.8 (Polarisierung). *Sei $\langle ., . \rangle$ ein Skalarprodukt mit Norm $\|.\|$. Dann gilt*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i \|v + iw\|^2 - i \|v - iw\|^2 \Big).$$

Insbesondere ist also das Skalarprodukt durch die Norm eindeutig festgelegt.

Beweis. Man setzt rechts für die Norm $\|u\|^2$ jeweils $\langle u, u \rangle$ ein und nutzt die Sesquilinearität aus. ◻

In der Tat, diese Polarisierungsidentitäten nutzen nur die Sesquilinearität aus und nicht die Symmetrie, bzw Antisymmetrie. Wir formulieren daher das folgende Korollar.

Korollar 1.5.9. *Seien V, Z Vektorräume über $\mathbb{C}$ und sei*

$$b : V \times V \to Z$$

eine sesquilineare Abbildung. Sei $D(v) = b(v,v)$ die Diagonale. dann gilt für alle $v, w \in V$,

$$b(v,w) = \frac{1}{4}\Big(D(v+w) - D(v-w) + iD(v+iw) - iD(v-iw)\Big),$$

also ist b durch D eindeutig festgelegt.

Beweis. Wie im Satz. □

Definition 1.5.10. Eine **lineare Isometrie** zwischen zwei normierten Räumen V, W ist eine lineare Abbildung $T : V \to W$ mit

$$\|Tv\| = \|v\|$$

für jeden Vektor $v \in V$. Eine lineare Isometrie ist injektiv und ist sie zusätzlich surjektiv, so ist ihre Umkehrabbildung ebenfalls eine lineare Isometrie. In dem Fall heisst sie **isometrischer Isomorphismus**

Sind V und W Hilbert-Räume und ist $T : V \to W$ eine lineare Isometrie, so folgt

$$\langle Tv, Tw\rangle = \langle v, w\rangle$$

für alle $w, w \in V$. Dies folgt aus den Polarisierungsidentitäten (Satz 1.5.8).

Definition 1.5.11. Ein **Orthonormalsystem** oder **ONS** in einem Hilbert-Raum H ist eine Familie von Vektoren $(e_i)_{i\in I}$ für die gilt

$$\left\langle e_i, e_j\right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ heisst **vollständiges ONS**, oder **Orthonormalbasis ONB**, falls der von den e_i aufgespannte Untervektorraum dicht liegt in H.

Satz 1.5.12. *Jeder Hilbert-Raum H hat eine Orthonormalbasis. Für jede ONB $(e_i)_{i\in I}$ und Vektoren $v, w \in H$ gilt: Ist $c_i(v) = \langle v, e_i\rangle$, so sind nur abzählbar viele dieser Koeffizienten ungleich Null und es gilt*

$$v = \sum_{i\in I} c_i(v) e_i,$$

wobei die Reihe in jeder Reihenfolge konvergiert. Es gilt

$$\sum_{i\in I} |c_i(v)|^2 = \|v\|^2 \quad \text{oder, allgemeiner,} \quad \langle v, w\rangle = \sum_{i\in I} c_i(v)\overline{c_i(w)}$$

Ist umgekehrt $v = \sum_{i\in I} c_i e_i$ eine konvergente Reihe, dann folgt $c_i = c_i(v)$, d.h., die Koeffizienten sind eindeutig.

Sind ferner beliebige komplexe Koeffizienten $(c_i)_{i\in I}$ gegeben, so dass nur abzählbar viele ungleich Null sind und $\sum_{i\in I} |c_i|^2 < \infty$ gilt, dann konvergiert die Reihe $\sum_{i\in I} c_i e_i$ in H in jeder Reihenfolge mit demselben Grenzwert.

Korollar 1.5.13. *Man kann die Aussagen des Satzes auch so ausdrücken: Die Abbildung $v \mapsto (i \mapsto c_i(v))$ ist ein isometrischer Isomorphismus von Hilbert-Räumen $H \xrightarrow{\cong} \ell^2(I)$.*

Beweis. [Beweis des Satzes] Mit dem Lemma von Zorn beschafft man sich ein maximales ONS $(e_i)_{i\in I}$. Dessen Orthogonalraum

$$(e_i)_{i\in I}^{\perp} = \{v \in H : \langle v, e_i\rangle = 0\ \forall_{i\in I}\}$$

muss Null sein, denn ist $w \neq 0$ im Orthogonalraum, dann ist $f = w/\left\|w\right\|$ ein neuer Vektor, um den man das ONS erweitern kann, was der Maximalität widerspricht. Sei also $(e_i)_{i\in I}$ ein ONS mit trivialem Orthogonalraum und sei $v \in H$. Für eine endliche Teilmenge $E \subset I$ setze

$$v_E = \sum_{i\in E} c_i(v) e_i.$$

Dann gilt $\langle v_E, v\rangle = \langle v_E, v_E\rangle = \sum_{i\in E} |c_i(v)|^2$, wie man leicht sieht. Also ist

$$\begin{aligned}\|v - v_E\|^2 &= \langle v - v_E, v - v_E\rangle \\ &= \|v\|^2 - \langle v, v_E\rangle - \langle v_E, v\rangle + \langle v_E, v_E\rangle = \|v\|^2 - \sum_{i\in E} |c_i(v)|^2.\end{aligned}$$

Da dies ≥ 0 ist, folgt $\sum_{i\in E} |c_i(v)|^2 \leq \|v\|^2$. Also $\sum_{i\in I} |c_i(v)|^2 \leq \|v\|^2$. Damit folgt, dass nur abzählbar viele $c_i(v)$ ungleich Null sind und dass die Reihe der $|c_i(v)|^2$ konvergiert. Wir wollen zeigen, dass die Reihe $\sum_{i\in I} c_i(v)e_i$ in jeder Reihenfolge konvergiert. Sei also $c_1, c_2, \dots$ irgendeine Nummerierung der Koeffizienten $\neq 0$, so gilt für $n \leq m$ in $\mathbb{N}$,

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} c_i(v) e_i\right\|^2 = \sum_{i=n}^{m} |c_i(v)|^2,$$

woraus folgt, dass $\sum_{i=1}^{n} c_i(v)e_i$ eine Cauchy-Folge in H ist, also konvergiert. Wir zeigen, dass der Limes gleich v ist. Für $j \in I$ rechne

$$\left\langle v - \sum_{i\in I} c_i(v) e_i, e_j \right\rangle = \left\langle v, e_j\right\rangle - c_j(v) = 0.$$

Also ist der Vektor $v - \sum_{i\in I} c_i(v)e_i$ im Orthogonalraum des ONS, also gleich Null, die Summe konvergiert also in der Tat gegen v. Insbesondere ist der von (e_i) aufgespannte Unterraum dicht. Es folgt

$$\langle v, w\rangle = \left\langle \sum_{i\in I} c_i(v) e_i, \sum_{j\in I} c_j(w) e_j \right\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in I} c_i(v)\overline{c_j(w)} \left\langle e_i, e_j\right\rangle = \sum_{i\in I} c_i(v)\overline{c_j(w)}.$$

Ist umgekehrt $v = \sum_{j\in I} c_j e_j$ konvergent, so gilt wegen der Linearität und Stetigkeit des Skalarproduktes,

$$c_i(v) = \langle v, e_i\rangle = \left\langle \sum_{j\in I} c_j e_j, e_i \right\rangle = \sum_{j\in I} c_j \left\langle e_j, e_i\right\rangle = c_i.$$

Ist schliesslich $(c_i)_{i\in I}$ eine Familie von Koeffizienten mit $\sum_{i\in I} |c_i|^2 < \infty$, so folgt die Konvergenz von $\sum_i c_i e_i$ genau wie die oben gezeigte Konvergenz von $\sum_i c_i(v)e_i$. □

Beispiel 1.5.14. In der Analysis zeigt man in dem Abschnitt über Fourier-Reihen, dass die Funktionen

$e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ für $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([0,1]) \cong L^2([0,1)) \cong L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ ist.

Satz 1.5.15. *Je zwei ONB eines Hilbert-Raumes haben die gleiche Mächtigkeit. Zwei Hilbert-Räume sind isometrisch-isomorph, falls sie ONBs der gleichen Mächtigkeit haben.*

Beweis. Sei H ein Hilbert-Raum mit zwei ONBs $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$. Ist H endlich-dimensional, so folgt $|I| = |J|$ nach LinA. Sei also H unendlich-dimensional. Für $i \in I$ sei $S(i)$ die Menge aller $j \in J$ mit $\left\langle e_i, f_j \right\rangle \neq 0$. Da $e_i = \sum_{j\in J} \left\langle e_i, f_j \right\rangle f_j$, ist $S(i)$ stets abzählbar. Da andererseits auch jedes f_j sich in die e_i entwickeln lässt, folgt

$$\bigcup_{i\in I} S(i) = J.$$

Damit gibt es eine surjektive Abbildung $I \times \mathbb{N} \to J$. Da I und J beide unendliche Mengen sind, folgt hieraus $|J| \leq |I|$. Aus Symmetriegründen folgt $|I| = |J|$.

Sind H_1, H_2 Hilbert-Räume mit ONBs $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_i)_{i\in I}$, so definiert die Vorschrift $T(e_i) = f_i$ einen isometrische Isomorphismus von H_1 nach H_2. □

Lemma 1.5.16. *Sei V ein Vektorraum und $P : V \to V$ linear. Es gelte $P^2 = P$. Dann folgt*

$$V = \ker(P) \,\oplus\, \mathrm{Bild}(P).$$

Beweis. Sei $v \in V$ und sei $v_0 = v - P(v)$. Dann gilt $P(v_0) = P(v) - P^2(v) = P(v) - P(v) = 0$, also liegt v_0 im Kern. Es ist

$$v = v_0 + P(v) \in \ker(P) \;+\; \mathrm{Bild}(P).$$

Es bleibt zu zeigen, dass die Summe direkt ist, dass also $\ker(P) \cap \mathrm{Bild}(P) = 0$ ist. Sei v in diesem Schnitt. Dann ist $v = P(w)$ fuer ein w und es gilt $0 = P(v) = P^2(w) = P(w) = v$. □

Satz 1.5.17. (a) *Sei H ein Hilbert-Raum und U ein abgeschlossener Unterraum. Dann gilt*

$$H = U \oplus U^{\perp},$$

wobei $U^{\perp} = \{v \in H : \langle v, U\rangle = 0\}$ der **Orthogonalraum** *zu U ist.*

(b) *Sei H ein Hilbert-Raum und sei $\alpha : H \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Vektor $w \in H$ mit*

$$\alpha(v) = \langle v, w\rangle$$

für jeden Vektor $v \in H$.

Beweis. (a) Wie in der Linearen Algebra sieht man $U \cap U^\perp = 0$. Da U ein abgeschlossener Unterraum ist, ist U selbst wieder ein Hilbert-Raum. Sei (e_i) eine ONB von U und setze für $v \in H$:

$$P(v) = \sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i.$$

Dann ist $P : H \to U$ eine lineare Abbildung mit $P(v) = v$ falls $v \in U$, also $P^2 = P$, d.h., P ist eine **Projektion**. Der Kern von P ist $U^\perp$. Sei $v \in H$, dann ist $v - P(v) \in \operatorname{Ker} P = U^\perp$, also folgt $H = U \oplus U^\perp$.

(b) Sei $\alpha : H \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Ist $\alpha = 0$, so wähle $w = 0$. Ist $\alpha \neq 0$, dann ist $U = \operatorname{Ker}(\alpha)$ ein abgeschlossener Unterraum von H. Daher ist $H = U \oplus U^\perp$ und da $U \neq H$, ist $U^\perp \neq 0$. Sei also $w_0 \in U^\perp$ mit $\|w_0\| = 1$. Dann ist $\alpha(w_0) = c \neq 0$. Setze $w = \bar{c} w_0$. Dann ist

$$\alpha(w_0) = c = \langle w_0, w \rangle .$$

Da α einen Isomorphismus $U^\perp \to \mathbb{C}$ induziert, ist $U^\perp = \mathbb{C} w_0$, also insbesondere ist jedes $v \in H$ von der Form $v = \lambda w_0 + u$ mit $u \in U$. Daher ist

$$\alpha(v) = \alpha(\lambda w_0 + u) = \lambda c = \lambda \langle w_0, w \rangle = \langle v, w \rangle .$$

Dies zeigt die Existenz. Für die Eindeutigkeit nimm an, es gebe einen weiteren Vektor w' mit $\alpha(v) = \langle v, w' \rangle$. Dann gilt für jedes $v \in H$, dass $0 = \langle v, w - w' \rangle$. Insbesondere für $v = w - w'$ folgt $w - w' = 0$. □

* * *

1.6 Vervollständigung

Definition 1.6.1. Seien X, Y metrische Räume. Eine **Isometrie** von X nach Y ist eine Abbildung $f \colon X \to Y$ mit

$$d(f(x), f(x')) = d(x, x')$$

für je zwei Elemente $x, x' \in X$. Eine Isometrie ist stetig und injektiv. Ist eine Isometrie surjektiv, so ist ihre Umkehrabbildung ebenfalls eine Isometrie. Eine bijektive Isometrie heisst **isometrischer Isomorphismus**.

Ein metrischer Raum X heisst **vollständig**, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert.

Satz 1.6.2 (Vervollständigung). *Sei X ein metrischer Raum. Dann existiert eine Isometrie $\phi \colon X \to \hat{X}$ in einen vollständigen metrischen Raum $\hat{X}$, so dass das Bild $\phi(X)$ dicht in $\hat{X}$ liegt. Das Paar $(\hat{X}, \phi)$ nennt man eine* **Vervollständigung** *von X.*

Die Vervollständigung ist eindeutig bestimmt in folgendem Sinne: Ist $\psi : X \to Y$ eine weitere Isometrie auf einen dichten Teilraum eines vollständige Raumes Y, dann existiert genau ein isometrischer Isomorphismus

$\alpha : \hat{X} \to Y$ so dass $\psi = \alpha \circ \phi$, d.h., das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \hat{X} \arrow[d, "\alpha"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir konstruieren $\hat{X}$. Sei $CF(X)$ die Menge aller Cauchy-Folgen in X. Wir haben eine natürliche Abbildung $\tilde{\phi} \colon X \to CF(X)$, die jedes $x \in X$ auf die konstante Folge $x_n = x$ wirft.

Auf $CF(X)$ betrachten wir folgende Äquivalenzrelation: Zwei Cauchy-Folgen (x_n) und (y_n) heissen äquivalent, $(x_n) \sim (y_n)$, falls die Folge $d(x_n, y_n)$ gegen Null geht. Ist (x_n) eine Cauchy-Folge und ist (y_n) eine Teilfolge, so folgt $(x_n) \sim (y_n)$. Sei

$$\hat{X} := CF(X)/\sim .$$

Die Abbildung ϕ ist gegeben durch $\tilde{\phi}$ gefolgt von der Projektion $CF(X) \to CF(X)/\sim$. Die Metrik auf $\hat{X}$ ist gegeben durch $d([x_n], [y_n]) = \lim_n d(x_n, y_n)$, wobei zu zeigen ist, dass dieser Limes existiert und nicht von der Wahl der Vertreter abhängt. Dies und den Rest des Beweises überlassen wir dem Leser zur Übung. □

Satz 1.6.3. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so kann man die Norm auf die Vervollständigung $\hat{V}$ fortsetzen. Dasselbe gilt für die Vektorraumstruktur, so dass $\hat{V}$ wieder ein normierter Raum ist und $\phi : V \to \hat{V}$ ist eine lineare Isometrie.*

Beweis. Man definiert $\|v\| = d(0, v)$ für $v \in \hat{V}$. Es folgt $\|v\| = \lim_j \left\|v_j\right\|$ für jede Folge (v_j) in V, die gegen v konvergiert. Aus dieser Tatsache schliesst man leicht die Normeigenschaft. Die Vektorraumstruktur definiert man durch

$$v + w = \lim_j (v_j + w_j),$$

wobei $v_j \to v$ und $w_j \to w$ Folgen in V sind. Wir zeigen hier beispielhaft die Wohldefiniertheit. Es ist zu zeigen, dass die Folge $(v_j + w_j)$ konvergiert und dass der Grenzwert nicht von der Wahl der Folgen abhängt. Für $j, k \in \mathbb{N}$ ist

$$\left\|(v_j + w_j) - (v_k + w_k)\right\| \le \left\|v_j - v_k\right\| + \left\|w_j - w_k\right\|,$$

also ist $(v_j + w_j)$ eine Cauchy-Folge, damit konvergent. Sind $\tilde{v}_j$ und $\tilde{w}_j$ weitere Cauchy-Folgen, die gegen v und w in $\hat{V}$ konvergieren, dann gilt

$$\left\|(v_j + w_j) - (\tilde{v}_j + \tilde{w}_j)\right\| \le \left\|v_j - \tilde{v}_j\right\| + \left\|w_j - \tilde{w}_j\right\|,$$

also ist der Grenzwert wohldefiniert. Der Rest geht ähnlich. □

* * *

1.7 Äquivalenz der Normen bei endlicher Dimension

Satz 1.7.1. *Seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ zwei Normen auf demselben $\mathbb{C}$-Vektorraum V. Dann sind äquivalent:*

(a) *Die beiden Normen definieren dieselbe Topologie auf V.*

(b) *Es gibt Zahlen $C, c > 0$ so dass gilt:*

$$c\,\|\cdot\|_a \le \|\cdot\|_b \le C\,\|\cdot\|_a$$

(c) *Eine Folge konvergiert genau dann in $\|\cdot\|_a$, wenn sie in $\|\cdot\|_b$ konvergiert. In diesem Fall sind die Limiten gleich.*

Beweis. (a)⇒(b): Wenn beide dieselbe Topologie definieren, heisst das, dass die Identitaet, aufgefasst als Abbildung

$$(V, \|\cdot\|_a) \to (V, \|\cdot\|_b)$$

stetig, also beschraenkt ist. Dies liefert die zweite Abschaetzung, die erste folgt aus Symmetrie.

(b)⇒(c): Dies ist trivial.

(c)⇒(a): In einem metrischen Raum ist eine Menge genau dann abgeschlossen, wenn sie mit jeder Folge auch deren Limes enthaelt. Aus (c) folgt dann, dass beide Normen dieselben abgeschlossenen Mengen haben, damit sind die Topologien gleich. □

Definition 1.7.2. Wir nennen zwei Normen auf V **äquivalent**, wenn sie den Bedingungen dieses Satzes genügen.

Beispiel 1.7.3. Auf dem Raum $C_c(\mathbb{R})$ definieren wir zwei Normen, die L^1-Norm

$$\left\|f\right\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$$

und die Supremumsnorm

$$\left\|f\right\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Diese beiden Normen sind nicht äquivalent, denn zum Beispiel geht die Folge der charakteristischen Funktionen $\mathbf{1}_{[0,1/n]}$ in der L^1-Norm gegen Null, in der Supremumsnorm nicht.

Satz 1.7.4. *Ist der $\mathbb{C}$-Vektorraum endlich-dimensional, so sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$, wobei n die Dimension ist. Es reicht also, die Behauptung für $V = \mathbb{C}^n$ zu zeigen. Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{C}^n$. Wir zeigen, dass sie äquivalent ist zur euklidischen Norm $\|\cdot\|_{\mathrm{eukl}}$. Seien $e_1, \dots, e_n$ die Standard-Basisvektoren von $\mathbb{C}^n$. Es folgt

$$\|v\| = \left\| \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\| \le \sum_{j=1}^n |v_j| \left\| e_j \right\| \le n \underbrace{\left(\max_j |v_j| \right)}_{=\|v\|_{\max}} \underbrace{\left(\max_j \left\| e_j \right\| \right)}_{=M} \le n\, M\ \|v\|_{\mathrm{eukl}}\,.$$

Das bedeutet, dass die Identitaet, aufgefasst als Abbildung

$$(\mathbb{C}^n, \|.\|_{\mathrm{eukl}}) \to (\mathbb{C}^n, \|.\|)$$

beschraenkt, also stetig ist. Damit ist das Bild der Menge $S = \left\{ v \in \mathbb{C}^n : \|v\|_{\mathrm{eukl}} = 1 \right\}$ kompakt. Da $0 \notin S$, folgt, dass das Minimum

$$c = \min \left\{ \|v\| : v \in S \right\}$$

angenommen wird und > 0 ist. Das bedeutet

$$\|w\|_{\mathrm{eukl}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \|w\| \ge c.$$

Für $v \neq 0$ heisst das $\left\| \frac{v}{\|v\|_{\mathrm{eukl}}} \right\| \ge c$, oder $\|v\| \ge c\, \|v\|_{\mathrm{eukl}}$ und die Behauptung ist bewiesen. □

* * *

1.8 Nichtstetige lineare Abbildungen

Nichtstetige lineare Abbildungen sind für diese Vorlesung nicht von Interesse. Der Vollständigkeit halber wollen wir aber die Frage ihrer Existenz klären. Ja, es gibt sie, und zwar viele davon. Um dies zu beweisen betrachtet man Hamel-Basen.

Sei $(e_j)_{j \in J}$ eine Orthonormalbasis. Schreibe $E = \{e_j : j \in J\}$. Diese ist dann zwar linear unabhängig, aber keine Hamel-Basis, denn sei $F = \{f_1, f_2, \dots\} \subset E$ eine abzählbare Teilmenge, wobei wir $f_i \neq f_j$ für $i \neq j$ annehmen. Nach Satz 1.5.12 ist die Reihe $v = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j} f_j$ konvergent in H, aber nicht als endliche Summe von Elementen von E darstellbar. Wir vergrössern E zu einer Hamel-Basis HB. Wir können ein lineares Funktional $\phi : H \to \mathbb{C}$ definieren, indem wir ϕ auf der Hamel-Basis vorgeben. Wir setzen also $\phi(e) = 0$ für jedes $e \in E$ und $\phi(b) = 1$ für $b \in B \smallsetminus E$. Dann ist ϕ ein lineares Funktional, das nicht stetig ist, denn jedes stetige lineare Funktional, dass die e_j auf Null wirft, ist schon Null.

* * *

2 Grundprinzipien der Funktionalanalysis

2.1 Fortsetzung von linearen Funktionalen

In diesem Abschnitt geht es um folgendes Prinzip: Ein stetiges lineares Funktional kann von einem beliebigen Teilraum auf den ganzen Raum stetig und linear fortgesetzt werden.

Satz 2.1.1. *Ist V ein Banach-Raum und ist die Menge*

$$\overline{B} = \overline{B}_1(0) = \{v \in V : \|v\| \le 1\}$$

kompakt, dann ist V endlich-dimensional.

Beweis. Sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum. Für eine Teilmenge $U \subset V$ und $v \in V$ definiere

$$d(v, U) = \inf_{u \in U} \|v - u\|.$$

Lemma 2.1.2. *Ist $U \neq V$ ein abgeschlossener linearer Unterraum, dann existiert ein $v \in V$, so dass $\|v\| = 1$ und $d(v, U) \ge \frac{1}{2}$.*

Beweis. Zu $w \in V \setminus U$ wähle ein $u_0 \in U$, so dass $\|w - u_0\| \le 2d(w, U)$. Setze $v = \frac{w-u_0}{\|w-u_0\|}$. Dann gilt $\|v\| = 1$ und

$$d(v, U) = d\left(\frac{w - u_0}{\|w - u_0\|}, U\right) = d\left(\frac{w}{\|w - u_0\|}, U\right) = \frac{1}{\|w - u_0\|} d(w, U) \ge \frac{1}{2}.$$ □

Zum Beweis des Satzes: Ist V unendlich-dimensional, so gibt es eine Folge von Unterräumen $V_1 \subset V_2 \subset \dots$ mit $\dim V_n = n$. Nach dem Lemma gibt es $v_n \in V_n \setminus V_{n-1}$ mit $v_n \in \overline{B}$ und $\|v_n - u\| \ge \frac{1}{2}$ für jedes $u \in V_{n-1}$. Insbesondere folgt $\|v_n - v_m\| \ge \frac{1}{2}$ falls $n \neq m$. Also enthält die Folge $v_n \in \overline{B}$ keine konvergente Teilfolge, also ist $\overline{B}$ nicht kompakt. □

Satz 2.1.3 (Hahn-Banach). *Sei U ein Unterraum eines reellen Vektorraums V und sei $p : V \to [0, \infty)$ eine Abbildung mit*

$$p(v + w) \le p(v) + p(w) \quad \text{und} \quad p(\lambda v) = \lambda p(v)$$

für alle $v, w \in V$, $\lambda \ge 0$. Sei $\alpha : U \to \mathbb{R}$ linear mit $\alpha(u) \le p(u)$ für jedes $u \in U$. Dann existiert eine lineare Abbildung $\tilde{\alpha} : V \to \mathbb{R}$ mit

- $\tilde{\alpha}(u) = \alpha(u), \quad u \in U$ *und*

- $-p(-v) \le \tilde\alpha(v) \le p(v), \quad v \in V.$

Insbesondere folgt: Jedes stetige lineare Funktional auf einem Unterraum eines normierten Raums kann stetig auf den ganzen Raum fortgesetzt werden, wobei die Fortsetzung dieselbe Norm hat.

Beweis. Nimm an $U \neq V$. Sei $v_1 \in V \setminus U$ und setze

$$W = U \oplus \mathbb{R}v_1.$$

Dann ist W ein Untervektorraum von V. Seien $u, u' \in U$. Wegen

$$\alpha(u) + \alpha(u') = \alpha(u + u') \le p(u + u') \le p(u - v_1) + p(v_1 + u')$$

folgt

$$\alpha(u) - p(u - v_1) \le p(u' + v_1) - \alpha(u').$$

Sei M das Supremum über die linke Seite, wobei u in U läuft. Es folgt also

$$\alpha(u) - p(u - v_1) \le M \le p(u' + v_1) - \alpha(u')$$

für alle $u, u' \in U$. Setze

$$\tilde\alpha(u + tv_1) = \alpha(u) + tM.$$

Dann ist $\tilde\alpha$ linear auf W, es setzt α fort und für $t > 0$ gilt mit $y = u/t$,

$$\tilde\alpha(u + tv_1) = \alpha(u) + tM \le \alpha(u) + tp(y + v_1) - t\alpha(y) = p(u + tv_1).$$

und ebenso

$$\tilde\alpha(u - tv_1) = \alpha(u) - tM \le \alpha(u) - t\Big(\alpha(y) - p(y - v_1)\Big) = tp(y - v_1) = p(u - tv_1).$$

Zusammen folgt $\tilde\alpha(w) \le p(w)$ für alle $w \in W$. Indem man w durch $-w$ ersetzt, folgt auch $-p(-w) \le \tilde\alpha(w)$, also ist $\tilde\alpha$ die gewünschte Fortsetzung nach W. Wir haben damit gezeigt, dass im Fall $U \neq V$ das Funktional α stets eine Fortsetzung auf einen Unterraum $W \neq U$ besitzt. Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximaler Unterraum $\tilde U \subset V$, auf den sich α mit $-p(-u) \le \alpha(u) \le p(u)$ fortsetzen lässt. Ist $\tilde U \neq V$, so lässt sich aber α noch weiter fortsetzen, was der Maximalität widerspricht! Es folgt $\tilde U = V$ und die Hauptaussage des Satzes ist bewiesen.

Für die Zusatzaussage sei $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, $U \subset V$ ein Unterraum und $\alpha : U \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Sei $C = \|\alpha\|_{\mathrm{op}}$ die Operatornorm von α. Setze $p(v) = C\,\|v\|$. Das $\mathbb{R}$-lineare Funktional $\mathrm{Re}(\alpha)$ besitzt dann eine $\mathbb{R}$-lineare Fortsetzung $\tilde\alpha_{\mathbb{R}}$ nach V mit $|\tilde\alpha_{\mathbb{R}}(v)| \le p(v)$. Sei $\tilde\alpha$ das komplex-lineare Funktional mit $\mathrm{Re}(\tilde\alpha) = \tilde\alpha_{\mathbb{R}}$. Ist $v \in V$, so existiert ein $\theta \in \mathbb{R}$, so dass $e^{i\theta}\tilde\alpha(v) = \tilde\alpha(e^{i\theta}v) \in \mathbb{R}$ gilt. Es folgt

$$|\tilde\alpha(v)| = |e^{i\theta}\tilde\alpha(v)| = |\tilde\alpha_{\mathbb{R}}(e^{i\theta}v)| \le p(e^{i\theta}v) = p(v).$$ □

Definition 2.1.4. Sei V ein normierter Vektorraum. Wir bezeichnen mit V' die Menge aller stetigen linearen Funktionale $V \to \mathbb{C}$. Wir nennen V' den **stetigen Dualraum**. Er ist in der Regel ein echter Teilraum des algebraischen Dualraums V^*.

Lemma 2.1.5. *Ein lineares Funktional $\alpha \neq 0$ auf einem normierten Raum ist eine offene Abbildung.*

Es braucht in der Tat noch nicht einmal stetig zu sein.

Beweis. Sei $0 \neq \alpha : V \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung und sei $U \subset V$ eine offene Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass das Bild $\alpha(U)$ offen ist. Sei also $z \in \alpha(U)$, also etwa $z = \alpha(u)$. Sei $v \in V$ mit $\alpha(v) \neq 0$. Dann ist die Menge $M = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda v + u \in U\}$ offen in $\mathbb{C}$. Das Bild von α enthält die Menge aller $\alpha(\lambda v + u) = \lambda\alpha(v) + z$, wobei $\lambda \in M$ ist. Dies ist gerade das Bild von M unter der affinen Abbildung $m \mapsto \alpha(v)m + \alpha(u)$, also offen. Damit enthält das Bild von α eine offene Umgebung des Punktes z. Da z beliebig war, ist das Bild offen. $\square$

Definition 2.1.6. Eine Teilmenge $A \subset V$ eines reellen Vektorraums V heisst **konvex**, falls A mit zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält, also wenn für alle $v, w \in V$ und $t \in [0,1]$ gilt

$$v, w \in A \quad \Rightarrow \quad (1-t)v + tw \in A.$$

Satz 2.1.7. *Konvexe Teilmengen lassen sich durch stetige lineare Funktionale trennen.*

Genauer seien A, B nichtleere, konvexe Teilmengen eines normierten Raumes V mit $A \cap B = \emptyset$.

(a) *Ist A offen, dann existiert ein $\alpha \in V'$ und ein $T \in \mathbb{R}$ mit*

$$\mathrm{Re}(\alpha(a)) < T \le \mathrm{Re}(\alpha(b))$$

für alle $a \in A$, $b \in B$.

(b) *Ist A kompakt und B abgeschlossen, so existieren $\alpha \in V'$ und $S, T \in \mathbb{R}$ mit*

$$\mathrm{Re}(\alpha(a)) < S < T < \mathrm{Re}(\alpha(b))$$

für alle $a \in A$, $b \in B$.

Beweis. (a) Sei A offen. Wähle Fußpunkte $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ und setze $v_0 = b_0 - a_0$. Sei

$$\begin{aligned} U = A - B + v_0 &= \{a - b + v_0 : a \in A,\ b \in B\} \\ &= \bigcup_{b \in B} \underbrace{A - b + v_0}_{\text{offen}}. \end{aligned}$$

Dann ist U eine konvexe offene Nullumgebung in V. Sei

$$p(v) := \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}v \in U\right\}.$$

Es folgt $p(\lambda v) = \lambda p(v)$ für $\lambda > 0$. Die Funktion p nimmt endliche Werte an und da U konvex ist, erfüllt p die Dreiecksungleichung, also es gilt

$$p(v + w) \le p(v) + p(w)$$

für alle $v, w \in V$. Da $v_0 \notin U$, folgt $p(v_0) \ge 1$. Auf dem eindimensionalen Raum $\mathbb{R}v_0$ definiere ein Funktional $\alpha(tv_0) = t$. Nach Satz 2.1.3 setzt α zu einem reellen linearen Funktional auf V fort mit $-p(-v) \le \alpha(v) \le p(v)$. Wir zeigen, dass α stetig ist. Da U offen ist und die Null enthält, existiert ein $r > 0$ mit $B_r(0) \subset U$. Das bedeutet: $\|v\| < r \Rightarrow v \in U \Rightarrow p(v) < 1$. Ersetzt man v durch rv, so heisst das $\|v\| < 1 \Rightarrow p(v) < \frac{1}{r}$ und im Grenzwert $\|v\| \le 1 \Rightarrow p(v) \le \frac{1}{r}$ also insbesondere $\|v\| = 1 \Rightarrow p(v) \le \frac{1}{r}$. Damit

$$\sup_{\|v\|=1} |\alpha(v)| \le \sup_{\|v\|=1} p(v) \le \frac{1}{r}.$$

Also ist α beschränkt, ergo stetig. Sind nun $a \in A$ und $b \in B$, so folgt

$$\alpha(a) - \alpha(b) + 1 = \alpha(a - b + v_0) \le p(a - b + v_0) \ < \ 1,$$

also $\alpha(a) < \alpha(b)$ Die Bilder $\alpha(A)$ und $\alpha(B)$ sind konvexe Teilmengen von $\mathbb{R}$, also Intervalle. Da A offen ist, ist $\alpha(A)$ nach Lemma 2.1.5 ein offenes Intervall, damit folgt (a).

(b) **Beh.** Es gibt eine konvexe offene Nullumgebung U, so dass $(A + U) \cap B = \emptyset$ gilt.
Beweis: Angenommen nicht. Sei B_n der offene Ball $B_{1/n}(0)$. Es gilt dann $(A + B_n) \cap B \neq \emptyset$, also gibt es $x_n \in A + B_n$, etwa $x_n = a_n + b_n$ mit $a_n \in A$ und $\|b_n\| < 1/n$. Da A kompakt ist, hat die Folge (a_n) eine konvergente Teilfolge, wir ersetzen sie durch diese und nehmen an, dass (a_n) gegen ein a_0 in A konvergiert. Da $b_n \to 0$, folgt $x_n \to a$. Nun ist aber $x_n \in B$ und B ist abgeschlossen, also $a_0 \in A \cap B$, diese Menge war aber als leer angenommen worden. **Widerspruch!**

Die Mengen $A + U$ und B können nach Teil (a) durch ein stetiges Funktional α getrennt werden, dann ist $\alpha(A + U)$ ein offenes Intervall disjunkt zum Intervall $\alpha(B)$. Ferner ist $\alpha(A)$ ein kompaktes Intervall, das im offenen Intervall $\alpha(A + U)$ enthalten ist. □

Korollar 2.1.8. *Sei V ein normierter Raum.*

(a) *Ist $V \neq 0$ ein normierter Raum, dann gibt es fuer jedes $v \in V$ ein lineares Funktional α von Norm 1, so dass*

$$\alpha(v) = \|v\|.$$

(b) *V' ist punktetrennend. Das heisst fuer je zwei $v \neq w$ in V gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha \in V'$ mit $\alpha(v) \neq \alpha(w)$.*

Beweis. (a) Sei $\alpha : \mathbb{C}v \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\alpha(zv) = z\,\|v\|$. Dann hat α Norm 1, setzt also fort zu einem

Funktional von Norm 1.

(b) Wende (a) auf den Vektor $v - w$ an. □

Korollar 2.1.9. *Sei V ein normierter Raum und U ein Unterraum, sowie $v \in V \setminus \overline{U}$. Dann gibt es ein $\alpha \in V'$, so dass $\alpha(v) \neq 0$ und $\alpha(U) = 0$.*

Beweis. Zunaechst definieren wir α auf dem Raum $\overline{U} \oplus \mathbb{C}v$ durch

$$\alpha(u + \lambda v) = \lambda.$$

Da $v \notin \overline{U}$, gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\|v - u\| \geq \delta$ fuer jedes $u \in \overline{U}$ gilt. Insbesondere folgt fuer $u \in U$ und $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, dass $\left\|\frac{1}{\lambda}u + v\right\| \geq \delta$, also

$$|\alpha(u + \lambda v)| = |\lambda| \leq \frac{|\lambda|}{\delta}\left\|\frac{1}{\lambda}u + v\right\| = \frac{1}{\delta}\|u + \lambda v\|.$$

Damit ist α beschraenkt, kann also nach Hahn-Banach zu einem stetigen Funktional auf V fortgesetzt werden. □

* * *

2.2 Der Satz von Krein-Milman

Definition 2.2.1. Sei $A \subset V$ eine Teilmenge eines Banach-Raums, dann ist die **konvexe Huelle** conv(A) von A definiert als der Schnitt aller konvexen Mengen, die A enthalten:

$$\operatorname{conv}(A) = \bigcap_{\substack{C \supset A \\ C \text{ konvex}}} C.$$

Die ist die kleinste konvexe Menge, die A enthaelt.

Beispiele 2.2.2.

(a) Die konvexe Huelle zweier Punkte ist das Geradensegment zwischen ihnen, bei drei Punkten bekommt man ein Dreieck, bei vieren ein Tetraeder usf.

(b) Die konvexe Huelle der Kreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ ist der abgeschlossene Einheitsball $\overline{B}_1(0)$.

(c) Sei $A \subset \mathbb{C}$ die abzaehlbare Menge aller $z = e^{2\pi i r}$, $r \in \mathbb{Q}$. Dann ist

$$\operatorname{conv}(A) = A \sqcup B_1(0).$$

Proposition 2.2.3. *Die Punkte der konvexen Huelle von $A \neq \emptyset$ lassen sich explizit angeben:*

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j a_j : n \in \mathbb{N},\ a_j \in A,\ 0 \leq t_j \leq 1,\ \sum_j t_j = 1 \right\}.$$

Man sagt das so: die Punkte von conv(A) *sind die endlichen* **Konvexkombinationen** *von Punkten aus A.*

Beweis. Sei $\hat{A}$ die rechte Seite der Gleichung. Dann gilt $A \subset \hat{A}$ und $\hat{A}$ ist konvex. Wir zeigen durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass conv(A) alle Konvexkombinationen der Laenge $\leq n$ enthaelt. Fuer $n = 1$ sind die Konvexkombinationen gerade die Punkte von A und damit liegen diese in conv(A).

Es sei nun bereits gezeigt, dass alle Konvexkombinationend der Laenge $\leq n$ in conv(A) liegen und es sei

$$v = \sum_{j=1}^{n+1} t_j a_j$$

mit $a_j \in A$ und $0 \leq t_j \leq 1$, sowie $\sum_{j=1}^{n+1} t_j = 1$. Setze $\lambda = \sum_{j=1}^{n} t_j \leq 1$. Wir koennen $\lambda \neq 0$ annehmen. Es gilt $t_{n+1} = 1 - \lambda$ und daher

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^{n} t_j a_j \ + \ t_{n+1} a_{n+1} \\ &= \lambda \sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{\lambda} a_j \ + \ (1-\lambda) a_{n+1}. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung liegt $\sum_{j=1}^{n} \frac{t_j}{\lambda} a_j$ in conv(A) und da conv(A) konvex ist, liegt daher auch v in conv(A). □

Definition 2.2.4. Fuer zwei Elemente x, y eines lokalkonvexen Raums V schreiben wir

$$(x, y) = \left\{ (1-t)x + ty : t \in (0,1), x, y \in K \right\}$$

fuer die Strecke zwischen x und y (ohne Endpunkte). Sei K eine kompakte Teilmenge von V. Eine abgeschlossene Teilmenge $\emptyset \neq S \subset K$ heisst **Seite** von K, falls gilt

$$x, y \in K, \ (x, y) \cap S \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad x, y \in S.$$

Insbesondere ist K selbst eine Seite. Die Seiten eines Dreiecks sind die Kanten und die Eckpunkte.

Definition 2.2.5. Ein Punkt $k \in K$ heisst **Extremalpunkt** von K, falls $\{k\}$ eine Seite ist. Das heisst also, dass k sich nicht als echte Konvexkombination zweier Punkte in K schreiben laesst. Wir schreiben

$$\mathrm{ext}(K)$$

fuer die Menge aller Extremalpunkte von K.

Satz 2.2.6 (Krein-Milmann)**.** *Sei $K \neq \emptyset$ eine konvexe kompakte Teilmenge eines Banach-Raums V. Dann gilt*

(a) *Jede Seite von K enthaelt einen Extremalpunkt. Insbesondere ist* $\mathrm{ext}(K) \neq \emptyset$.

(b) $K = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(K))}$.

Beweis. Wir zeigen, dass jede Seite S von K einen Extremalpunkt von K enthaelt. Da eine Seite S' von S auch eine Seite von K ist, reicht es, den Fall $S = K$ zu betrachten. Wir muessen also nur zeigen, dass K einen Extremalpunkt enthaelt.

Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Seiten von K. Wir versehen $\mathcal{S}$ mit der Ordnung die durch die Inklusion gegeben ist. Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ eine linear geordnete Teilmenge, dann ist

$$F = \bigcap_{S \in \mathcal{L}} S$$

wieder eine Seite, wobei die endliche Schnitteigenschaft der kompakten Menge K benutzt wird, um $F \neq \emptyset$ zu erreichen. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{L}$ ein minimales Element S. Wir behaupten, dass S nur einen Punkt enthaelt. **Angenommen**, es gibt $x \neq y$ in S. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha : V \to \mathbb{R}$ mit $\alpha(x) \neq \alpha(y)$. Sei nun $S' = \alpha^{-1}(t_0)$, wobei $t_0 = \min \alpha(S)$. Dann ist S' eine Seite in S, also auch eine Seite in K, die echt kleiner ist als S, was ein **Widerspruch** ist.

Daher gibt es also einen Extremalpunkt in K. Sei E die Menge aller Extremalpunkte in K und sei $K' = \overline{\mathrm{conv}(E)}$. **Angenommen**, $K' \neq K$, dann gibt es ein $x \in K \smallsetminus K'$ und nach Hahn-Banach gibt es ein stetiges lineares Funktional $\alpha : V \to \mathbb{R}$ so dass $\alpha(x) > \alpha(K)$. Dann ist

$$S = \alpha^{-1}\Big(\max\big(\alpha(K)\big)\Big)$$

eine Seite von K. Diese enthaelt einen Extremalpunkt, der nicht in K' liegt, **Widerspruch!** □

Anwendung 2.2.7. Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und sei M die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf X. Wir koennen M als Teilmenge des Dualraums $C(X)'$ des Banach-Raums $C(X)$ aller stetigen Funktionen auf X auffassen. Sie ist eine abgeschlossene Teilmenge des Einheitsballs, also folgt $M = \overline{\mathrm{conv}(\mathrm{ext}(M))}$. Man stellt fest, dass die Extremalpunkte in M genau die Punktmaße sind. Damit sagt der Satz, dass es zu jedem W-Maß μ auf X eine Folge von W-Maßen μ_n gibt, die jeweils endlichen Traeger haben und im Sinne der vagen Konvergenz gegen μ konvergieren. Damit lassen sich maßtheoretische Beweise auf Maße mit endlichen Traegern zurueckfuehren.

* * *

2.3 Von der offenen Abbildung und vom abgeschlossenen Graphen

In diesem Abschnitt und den folgenden brauchen wir wieder einen Satz aus der Topologie.

Definition 2.3.1. Ein topologischer Raum X heißt **Baire-Raum**, falls für jede abzählbare Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

abgeschlossener Mengen gilt:

$$\text{enthaelt } \bigcup_n A_n \text{ eine offene Menge} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \text{ein } A_{n_0} \text{ enthaelt eine offene Menge} \neq \emptyset.$$

Satz 2.3.2 (Baire). *Jeder lokalkompakte Hausdorff-Raum ist ein Baire-Raum. Jeder vollständige metrische Raum ist ein Baire-Raum.*

Beweis. Analysis. □

Korollar 2.3.3. *Ein Banach-Raum, der eine abzählbare Basis besitzt, ist endlich-dimensional.*

Beweis. Sei V ein Banach-Raum der von $v_1, v_2, \dots$ aufgespannt wird. Sei A_n der von $v_1, \dots v_n$ aufgespannte Unterraum. Dieser ist als endlich-dimensionaler normierter Raum selbst vollständig, also abgeschlossen in V. Ferner gilt $V = \bigcup_n A_n$, also enthält ein A_n eine offene Teilmenge von V. Jede offene Teilmenge von V enthält allerdings eine Basis, also ist $V = A_n$. □

Satz 2.3.4 (Satz von der offenen Abbildung). *Sei $T : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung zwischen Banach-Räumen. Ist T surjektiv, dann ist T eine offene Abbildung.*

Insbesondere gilt: Ist T bijektiv und stetig, so ist die Umkehrabbildung T^{-1} ebenfalls stetig. In diesem Fall nennen wir T **invertierbar**.

Beweis. Sei $B \subset V$ offen. Es ist zu zeigen, dass $T(B)$ offen ist. Da T linear ist, reicht es zu zeigen, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $T(B_\varepsilon(0))$ die Kugel $B_\delta(0)$ enthält.

1. Schritt. $\overline{T(B_\varepsilon(0))}$ enthält eine Kugel $B_\delta(0)$.
Sei $B = B_{\varepsilon/2}(0)$. Aus $V = \bigcup_n nB$ folgt

$$W = T(V) = \bigcup_n nT(B) \subset \bigcup_n n\overline{T(B)} \subset W.$$

Da der Banach-Raum W ein Baire-Raum ist, gibt es $m \in \mathbb{N}$, $w \in W$ und $\alpha > 0$ mit

$$m\overline{T(B)} \supset B_\alpha(w).$$

Aus $B_\varepsilon(0) \supset B - B$ folgt $T(B_\varepsilon(0)) \supset T(B) - T(B)$, also

$$\begin{aligned}\overline{T(B_\varepsilon(0))} \supset \overline{T(B) - T(B)} &\supset \overline{T(B)} - \overline{T(B)}\\ &\supset \frac{1}{m}B_\alpha(w) - \frac{1}{m}B_\alpha(w)\\ &= B_{\alpha/m}(w/m) - B_{\alpha/m}(w/m) \supset B_{\alpha/m}(0).\end{aligned}$$

2. Schritt. $T(B_\varepsilon(0))$ enthält eine Kugel $B_\delta(0)$.
Wähle Zahlen $r_n > 0$ mit $\sum_{n=0}^\infty r_n < \varepsilon$. Sei $V_\alpha = B_\alpha(0)$ und $W_\alpha = B_\alpha(0)$ in W. Nach dem 1. Schritt gibt es $\delta_n > 0$ mit $W_{\delta_n} \subset \overline{T(V_{r_n})}$. Wir können annehmen, dass δ_n eine Nullfolge ist. Sei $w \in W_{\delta_0}$, also $w \in \overline{T(V_{r_0})}$. Zu dem gegebenen δ_1 existiert dann ein $v_0 \in V_{r_0}$ mit $\|w - T(v_0)\| < \delta_1$, das heisst, $w - T(v_0) \in W_{\delta_1} \subset \overline{T(V_{r_1})}$. Dann existiert ein $v_1 \in V_{r_1}$ mit $\|w - T(v_0) - T(v_1)\| < \delta_2$. Durch Iteration erhalten wir eine Folge $v_n \in V_{r_n}$ mit

$$\|w - T(v_0) - \cdots - T(v_n)\| < \delta_{n+1}.$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{j=0}^\infty T(v_j)$ gegen w. Wegen

$$\sum_{j=0}^\infty \left\|v_j\right\| \le \sum_{j=0}^\infty r_j < \varepsilon,$$

konvergiert auch die Reihe $v = \sum_{j=0}^\infty v_j$ und es gilt $\|v\| < \varepsilon$, also $v \in V_\varepsilon$. Es folgt $T(v) = w$ und somit $W_{\delta_0} \subset T(B_\varepsilon(0))$. □

Korollar 2.3.5.
(a) *Gilt fuer einen Banach-Raum $V = X \oplus Y$ mit abgeschlossenen Unterraeumen X und Y, dann traegt V die Produkttoplogie, d.h., die Abbildung $X \times Y \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$ ist ein Homoeomorphismus.*

(b) *Eine Projektion $P : V \to V$ auf einem Banach-Raum V ist genau dann stetig, wenn Kern und Bild abgeschlossen sind.*

Beweis. (a) Die Abbildung ist stetig und surjektiv, also ein Homoemorphismus nach dem Satz der offenen Abbildung.

(b) Sei P eine Projektion, also eine lineare Abbildung mit $P^2 = P$. Dann gilt $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Bild}(P) = X \oplus Y$. Ist P stetig, dann ist X abgeschlossen. Der Raum Y ist der Kern der stetigen Abbildung $1 - P$ und damit auch abgeschlossen.

Seien umgekehrt X und Y abgeschlossen, dann traegt V die Produkttoplogie, die Projektion ist also stetig. □

Definition 2.3.6. Sei $T : V \to W$ eine Abbildung, so ist der **Graph** von T die Menge

$$G(T) = \Big\{(v, T(v)) : v \in V\Big\} \subset V \times W.$$

Satz 2.3.7 (Satz vom abgeschlossenen Graphen)**.** *Sei $T : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen Banach-Räumen.*

Der Graph $G(T)$ ist genau dann abgeschlossen im Produkt $V \times W$, wenn T stetig ist.

Beweis. Sei T stetig und sei $(v_j, T(v_j))$ eine Folge im Graphen, die in $V \times W$ gegen (v, w) konvergiert. Das bedeutet $v_j \to v$ und $T(v_j) \to w$. Da T stetig ist, konvergiert $T(v_j)$ gegen $T(v)$, also folgt $w = T(v)$, somit liegt (v, w) im Graphen, dieser ist also abgeschlossen.

Sei umgekehrt der Graph abgeschlossen. Die Abgeschlossenheit des Graphen bedeutet, dass für jede konvergente Folge $v_j \to v$ in V gilt: konvergiert $T(v_j)$ gegen $w \in W$, so gilt $T(v) = w$. Der Graph ist als abgeschlossener linearer Unterraum des Produktes selbst ein Banach-Raum. Die Abbildung $P : G(T) \to V$, gegeben durch $P(v, T(v)) = v$ ist stetig, surjektiv und injektiv, also auch offen. Damit ist die Umkehrabbildung $v \mapsto (v, T(v))$ stetig, also auch deren Komposition mit der zweiten Projektion $v \mapsto T(v)$. □

Beispiel 2.3.8. Wir geben eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen, die einen abgeschlossenen Graphen hat, aber nicht stetig ist. Sei $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ mit der Metrik von $\mathbb{R}$. Sei $Y = \mathbb{R}$ und $f(\frac{1}{n}) = n$, sowie $f(0) = 0$.

Als Anwendung beweisen wir den Satz von Hellinger Toeplitz.

Satz 2.3.9 (Hellinger-Toeplitz)**.** *Sei $T : H \to H$ ein linearer Operator, der* **symmetrisch** *ist in dem Sinne, dass*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

fuer alle $x, y \in H$ gilt. Dann ist T stetig.

Beweis. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen und der Linearitaet von T reicht es, folgendes zu zeigen: Ist (x_n) eine Nullfolge und ist Tx_n konvergent, dann ist $\lim_n Tx_n = 0$. Hierzu sei $y = \lim_n Tx_n$. Dann folgt

$$\langle y, y \rangle = \lim_n \langle Tx_n, y \rangle = \lim_n \langle x_n, Ty \rangle = \langle \lim x_n, Ty \rangle = \langle 0, y \rangle = 0.$$ □

* * *

2.4 Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit

Satz 2.4.1 (Banach-Steinhaus). *V sei ein Banach-Raum und W ein normierter Raum. $(T_i)_{i\in I}$ sei eine Familie stetiger linearer Abbildungen $V \to W$. Die Familie sei punktweise beschränkt, d.h. zu jedem $v \in V$ existiert ein $c_v > 0$ so dass*

$$\|T_i(v)\| \le c_v \|v\|$$

für jedes $i \in I$ gilt.

Dann ist die Familie T_i gleichmässig beschränkt, d.h. es gilt

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathrm{op}} \ < \ \infty.$$

Beweis. Sei $A_n = \{v \in V : \|T_i(v)\| \le n \ \forall_{i\in I}\}$. Dann ist A_n abgeschlossen und es gilt $V = \bigcup_n A_n$. Also gibt es nach dem Satz von Baire ein $n_0 \in \mathbb{N}$, ein $v_0 \in V$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$A_{n_0} \supset B_\varepsilon(v_0).$$

Sei $w \in V$ mit $\|w\| = 1$. Dann ist $v = v_0 + \frac{\varepsilon}{2} w \in B_\varepsilon(v_0) \subset A_{n_0}$, also folgt

$$\|T_i(w)\| = \left\| T_i\left(2\frac{v - v_0}{\varepsilon}\right)\right\| = \frac{2}{\varepsilon}\|T_i(v) - T_i(v_0)\| \le \frac{2}{\varepsilon}\Big(\|T_i(v)\| + \|T_i(v_0)\| \Big) \le \frac{4n_0}{\varepsilon},$$

also ist $\|T_i\|_{\mathrm{op}} \le \frac{4n_0}{\varepsilon}$. □

Korollar 2.4.2. *Punktweise Limiten stetiger linearer Operatoren sind stetig.*

Genauer sei V ein Banach-Raum, W ein normierter Raum. Eine Folge T_j stetiger linearer Operatoren $V \to W$, die punktweise konvergiert. Sei $T(v) = \lim_j T_j(v)$ für $v \in V$. Dann ist T ein stetiger linearer Operator von V nach W.

Beweis. Die Linearität von T ist klar. Da die Folge T_j punktweise konvergiert, ist sie punktweise beschränkt. Damit sind die Operatornormen beschränkt nach dem Satz von Banach-Steinhaus. Sei also etwa $\left\|T_j\right\|_{\mathrm{op}} \le C$ für jedes j. Dann folgt für $\|v\| = 1$,

$$\|T(v)\| = \lim_j \left\|T_j(v)\right\| \le C,$$

also $\|T\|_{\mathrm{op}} \le C$ und T ist stetig. □

* * *

2.5 Dualität bei Banach-Räumen

Seien V und W Banach-Räume. Auf dem Raum $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller stetigen linearen Operatoren $T : V \to W$ installieren wir die Operatornorm.

Lemma 2.5.1. *Mit der Operatornorm ist* $\mathrm{Hom}(V, W)$ *wieder ein Banach-Raum.*

Beweis. Wir müssen Vollständigkeit zeigen. Sei T_j eine Cauchy-Folge in $\mathrm{Hom}(V, W)$. Für $v \in V$ ist

$$\left\| T_j(v) - T_k(v) \right\| = \left\| (T_j - T_k)(v) \right\| \le \|v\| \left\| T_j - T_k \right\|_{\mathrm{op}}.$$

Damit ist $T_j(v)$ eine Cauchy-Folge in W, also konvergent. Sei $T(v)$ der Limes. Dann ist T wieder in $\mathrm{Hom}(V, W)$ nach Korollar 2.4.2. Wir müssen uns nur noch überzeugen, dass die Folge (T_j) auch in der Norm gegen T konvergiert. Hierbei hilft uns die Cauchy-Eigenschaft. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein j_0 so dass für alle $j, k \ge j_0$ gilt

$$\left\| T_j - T_k \right\| \le \varepsilon.$$

Für jedes $v \in V$ mit $\|v\| = 1$ gilt dann

$$\left\| T_j(v) - T_k(v) \right\| \le \varepsilon$$

und im Limes $k \to \infty$ also

$$\left\| T_j(v) - T(v) \right\| \le \varepsilon.$$

Da dies wie gesagt für jedes $\|v\| = 1$ gilt, folgt $\left\| T_j - T \right\|_{\mathrm{op}} \le \varepsilon$ und dies gilt für jedes $j \ge j_0$, was die verlangte Konvergenz bedeutet. □

Insbesondere ist also der stetige Dualraum V' wieder ein Banach-Raum.

Proposition 2.5.2. *Sei V ein Banach-Raum. Die Abbildung $\delta : V \to V''$ gegeben durch*

$$\delta_v(\alpha) = \alpha(v)$$

ist eine lineare Isometrie $V \hookrightarrow V''$.

Beweis. Linearität ist klar. Isometrie zu sein heisst für δ, dass $\|\delta_v\| = \|v\|$ gilt. Wir zeigen zunächst "$\le$". Für $v \in V$ ist

$$\|\delta_v\| = \sup_{\|\alpha\|=1} |\delta_v(\alpha)| = \sup_{\|\alpha\|=1} \underbrace{|\alpha(v)|}_{\le \|\alpha\| \|v\|} \le \|v\|.$$

Für die andere Abschätzung brauchen wir den Hahn-Banach Satz. Auf dem Raum $\mathbb{C}v$ betrachte das Funktional $\beta(tv) = t\|v\|$ und setze es linear fort zu einem Funktional β mit $|\beta(w)| \le \|w\|$. Da $|\beta(v)| = \|v\|$, gilt dann $\left\| \beta \right\| = 1$. Also folgt

$$\|\delta_v\| = \sup_{\|\alpha\|=1} |\alpha(v)| \ge |\beta(v)| = \|v\|.$$ □

Definition 2.5.3. Eine **Paarung** zwischen zwei Vektorräumen V und W ist eine bilineare Abbildung $b : V \times W \to \mathbb{C}$. Man kann eine Paarung b auch beschreiben durch die induzierte lineare Abbildung $\phi : V \to W^*$; $\phi(v)(w) = b(v, w)$ oder auch durch die entstehende Abbildung $W \to V^*$. Eine Paarung zwischen zwei Banach-Räumen heisst **perfekte Paarung**, falls die entstehenden Abbildungen jeweils in die stetigen Duale abbilden und isometrische Isomorphismen

$$\phi : V \xrightarrow{\cong} W', \qquad \psi : W \xrightarrow{\cong} V'$$

induzieren.

Definition 2.5.4. Eine Folge (x_n) in einem Banach-Raum V heisst **schwach konvergent** gegen $x \in V$, falls $\alpha(x_n) \to \alpha(x)$ fuer jedes $\alpha \in V'$.

Korollar 2.5.5.
(a) *Jede schwach konvergente Folge eines normierten Vektoraums ist beschraenkt.*

(b) *Eine Paarung $b : V \times W \to Z$ auf Banachraeumen ist genau dann stetig, wenn die Abbildungen $x \mapsto b(x, y_0)$ und $y \mapsto b(x_0, y)$ fuer alle $x_0 \in X,\ y_0 \in Y$ stetig sind.*

Beweis. (a) Sei $x_n \to x$ schwach konvergent. Sei dann $\Delta_n = \delta_{x_n} \in V''$ und $\Delta = \delta_x$. Dann gilt fuer $\alpha \in V'$ mit $\|\alpha\| = 1$, dass

$$\Delta_n(\alpha) = \alpha(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha(x) = \Delta(\alpha).$$

Insbesondere gibt es ein $c_\alpha > 0$, so dass

$$|\Delta_n(\alpha)| \le c_\alpha$$

fuer alle n. Fuer beliebige α folgt dann $|\Delta_n(\alpha)| \le c_\alpha \|\alpha\|$ und der Satz von Banach-Steinhaus besagt dann, dass es ein $C > 0$ gibt, so dass

$$\left\|\delta_{x_n}\right\| = \|\Delta_n\|_{\mathrm{op}} \le C$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Nach Proposition 2.5.2 ist aber $\left\|\delta_{x_n}\right\| = \|x_n\|$ und Teil (a) folgt.

(b) Die Hinrichtung ist klar. Nehmen wir also an, dass die beiden slots separat stetig sind. Seien dann $x_j \to x$ und $y_j \to y$ konvergente Folgen in V bzw W. Dann ist insbesondere die Folge $b(x_n, -) : W \to Z$ schwach konvergent gegen $b(x, -)$. Nach Teil (a) gibt es ein $C > 0$ so dass

$$|b(x_n, y')| \le C \left\|y'\right\|$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\begin{aligned}|b(x_n, y_n) - b(x, y)| &\le |b(x_n, y_n) - b(x_n, y)| + |b(x_n, y) - b(x, y)| \\ &= |b(x_n, y_n - y)| + |b(x_n - x, y)|\end{aligned}$$

Die Folge $|b(x_n - x, y)|$ geht nach Voraussetzung gegen Null. Ferner gilt

$$|b(x_n, y_n - y)| \le C \left\|y - y_n\right\|$$

und die rechte Seite geht gegen Null. Insgesamt konvergiert $b(x_j, y_j)$ also gegen $b(x, y)$. $\square$

Definition 2.5.6. Ein Banach-Raum V heisst **reflexiv**, falls die kanonische Abbildung $\delta : V \to V''$ auch surjektiv ist.

Lemma 2.5.7. (a) *Ein Banach-Raum V ist genau dann reflexiv, wenn die natürliche Paarung auf $V \times V'$ perfekt ist. Insbesondere ist V' dann auch reflexiv.*

(b) *Eine perfekte Paarung ist stetig.*

Beweis. (a) Wir zeigen, dass in der obigen Notation gilt

$$\phi = \delta.$$

Definitionsgemaess ist fuer $v \in V$ und $\alpha \in V'$,

$$\phi(v)(\alpha) = b(v, \alpha) = \alpha(v) = \delta_v(\alpha),$$

Also $\phi(v) = \delta_v$. Wir haben nun

$$\begin{aligned} b \text{ perfekt} &\Leftrightarrow \phi \text{ isometrischer Isomorphismus} \\ &\Leftrightarrow \delta \text{ isometrischer Isomorphismus} \\ &\Leftrightarrow V \text{ reflexiv.} \end{aligned}$$

(b) Sei $b : V \times W \to \mathbb{C}$ eine perfekte Paarung. Fuer festes $v \in V$ ist $w \mapsto b(v, w) = \phi(v)(w)$. Da $\phi(v) \in V'$, also stetig ist, ist b im zweiten Slot stetig. Aus Symmetrie dann auch im ersten und nach Korollar 2.5.5 ist b stetig. □

Beispiele 2.5.8. (a) Jeder endlich-dimensionale Banach-Raum ist reflexiv.

(b) Jeder Hilbert-Raum ist reflexiv.

Beweis. Sei H ein Hilbert-Raum. Wir müssen zeigen, dass $\delta : H \to H''$ surjektiv ist. Nach dem Satz von Riesz ist jedes $\alpha \in H'$ von der Form $\alpha = \alpha_w$ für ein $w \in H$, wobei $\alpha_w(v) = \langle v, w\rangle$ ist. Die Abbildung $\Phi : w \mapsto \alpha_w$ ist ein $\mathbb{R}$-linearer isometrischer Isomorphismus $H \xrightarrow{\cong} H'$. Durch $\langle \alpha_v, \alpha_w\rangle = \langle v, w\rangle$ wird ein Skalarprodukt auf H' installiert, so dass H' wieder ein Hilbert-Raum ist. Daher gibt es auch für H' den kanonischen $\mathbb{R}$-linearen Isomorphismus $\Phi' : H' \to H''$. Wir zeigen $\Phi' \circ \Phi = \delta$. Hierzu rechne für $v, w \in H$:

$$\begin{aligned} \Phi' \circ \Phi(v)(\alpha_w) &= \Phi'(\alpha_v)(\alpha_w) \\ &= \alpha_{\alpha_v}(\alpha_w) \\ &= \langle \alpha_w, \alpha_v\rangle = \langle v, w\rangle = \alpha_w(v) = \delta_v(\alpha_w). \end{aligned}$$

□

(c) Für $1 < p < \infty$ sei ℓ^p der Banach-Raum aller komplexen Folgen $z = (z_1, z_2, \dots)$ mit

$$\|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wir behaupten, dass die Paarung

$$\begin{aligned} \langle .,. \rangle : \ell^p \times \ell^q &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto \sum_{j=1}^{\infty} z_j w_j \end{aligned}$$

perfekt ist. Die Konvergenz der Reihe folgt aus der Hoelder-Ungleichung, die besagt

$$|\langle z, w\rangle| \le \|z\|_p \|w\|_q .$$

Für $w \in \ell^q$ sei $\alpha_w : \ell^p \to \mathbb{C}$ gegeben durch $\alpha_w(z) = \langle z, w\rangle$. Dann sagt die Hoelder-Ungleichung ausserdem, dass $\alpha_w \in (\ell^p)'$ und dass $\|\alpha_w\|_{\text{op}} \le \|w\|_q$ gilt. Wir wollen nun zeigen, dass hier Gleichheit gilt. Sei dazu $w \in \ell^q$ mit $\|w\|_q = 1$. Wir müssen zeigen, dass α_w die Operatornorm 1 hat. Definiere $z = (z_1, \dots)$ durch

$$z_j = \theta_j |w_j|^{\frac{q}{p}},$$

wobei $\theta_j \in \mathbb{C}$ mit $|\theta_j| = 1$ so gewählt ist, dass $w_j z_j \ge 0$ ist. Dann ist $z \in \ell^p$ und es gilt

$$\|z\|_p^p = \langle z, w\rangle = \|w\|_q^q = 1.$$

Wir haben also ein $z \in \ell^p$ gefunden mit $\|z\|_p = 1$ und $\alpha_w(z) = 1$, woraus $\|\alpha_w\|_{\text{op}} = 1$ folgt, so dass $w \mapsto \alpha_w$ eine Isometrie ist. Wir müssen zeigen, dass diese Isometrie surjektiv ist. Sei dazu $\alpha \in (\ell^p)'$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots)$ mit der Eins an der n-ten Stelle. Setze $w_n = \alpha(e_n)$. Wir behaupten, dass die so entstehende Folge w in ℓ^q liegt. Sei $z^n = (z_1, \dots, z_n, 0, \dots)$ die bei n abgeschnittene Folge. Wir wollen zeigen, dass $\sum_{j=1}^{\infty} |w_j|^q < \infty$ ist. Betrachte hierzu

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |w_j|^q &= \sum_{j=1}^{n} |w_j|^{q-1} |w_j| = \sum_{j=1}^{n} |w_j|^{\frac{q}{p}} |w_j| \\ &= \sum_{j=1}^{n} z_j w_j = \langle z^n, w\rangle = |\alpha(z^n)| \le C \|z^n\|_p , \end{aligned}$$

wobei $z_j = \theta_j |w_j|^{\frac{q}{p}}$ gewählt wird mit $|\theta_j| = 1$ und $C = \|\alpha\|_{\text{op}}$ ist. Nun ist wieder $\langle z^n, w\rangle = \langle z^n, w^n\rangle = \|z^n\|_p^p = \|w^n\|_q^q$ und daher

$$C \ge \frac{\|w^n\|_q^q}{\|z^n\|_p} = \frac{\|w^n\|_q^q}{\|w^n\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|w^n\|_q^{q - \frac{q}{p}} = \|w^n\|_q .$$

Die Folge $\|w^n\|_p$ ist monoton wachsend, also konvergent und daher $\|w\|_q < \infty$. Schliesslich gilt für beliebiges $z \in \ell^p$,

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} z_j w_j = \lim_n \sum_{j=1}^{n} z_j w_j = \lim_n \alpha(z^n) = \alpha(z).$$

Aus Symmetriegründen folgt dasselbe für vertauschte p und q. Insbesondere ist ℓ^p reflexiv.

(d) Wir liefern nun ein Beispiel eines nicht reflexiven Raums. Sei ℓ^∞ der Banach-Raum aller beschränkten Folgen $z = (z_1, z_2, \dots)$ in $\mathbb{C}$ mit der Norm

$$\|z\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} |z_j|.$$

Ferner sei ℓ^1 der Banach-Raum der Folgen mit $\|z\|_1 = \sum_{j=1}^\infty |z_j| < \infty$. Wir zeigen zunächst, dass $(\ell^1)' = \ell^\infty$ gilt via der Paarung

$$\begin{aligned} \langle ., . \rangle : \ell^1 \times \ell^\infty &\to \mathbb{C} \\ (z, w) &\mapsto \sum_{j=1}^{\infty} z_j w_j. \end{aligned}$$

Die Isometrie ist klar. Für die Surjektivität sei $\alpha \in (\ell^1)'$. Setze $w_n = \alpha(e_n)$. Da α beschränkt ist, liegt $w \in \ell^\infty$ und es gilt $\alpha(z) = \langle z, w\rangle$.

Wäre nun der Raum ℓ^1 reflexiv, so müsste die Paarung perfekt sein. ist sie aber nicht, denn die entstehende Abbildung $\ell^1 \to (\ell^\infty)'$ ist nicht surjektiv. Sei hierzu $U \subset \ell^\infty$ der abgeschlossene Unterraum der konvergenten Folgen. Sei $\alpha : U \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$\alpha(z) = \lim_{j\to\infty} z_j.$$

Dann ist α ein stetigen lineares Funktional, also gibt es nach Hahn-Banach eine stetige lineare Fortsetzung, die wir auch als α schreiben. Nun kann aber dieses α nicht von ℓ^1 kommen.

* * *

2.6 Schwache Topologien

Definition 2.6.1. Die **schwache Topologie** auf einem Banach-Raum V ist definiert als die Initialtopologie aller $\alpha \in V'$.

Es handelt sich also um die Topologie, die erzeugt wird von allen Mengen der Form

$$\alpha^{-1}(U),$$

wobei $\alpha \in V'$ und $U \subset \mathbb{C}$ offen ist. Da all diese Mengen in der Normtopologie offen sind, ist die schwache Topologie gröber als die Normtopologie, hat also a priori weniger offene Mengen.

Beispiele 2.6.2. (a) Ist V endlich-dimensional, dann ist die schwache Topologie gleich der Normtopologie. Hierzu reicht es, $V = \mathbb{C}^n$ anzunehmen. Die Koordinatenabbildungen $v \mapsto v_j$ für

$j = 1, \dots, n$ sind stetige lineare Funktionale, also sind alle Mengen der Gestalt $U_1 \times \cdots \times U_n$ schwach offen, wenn $U_1, \dots, U_n \subset \mathbb{C}$ offene Mengen sind. Diese Mengen erzeugen allerdings die Topologie von $\mathbb{C}^n$, die auch die Normtopologie ist.

(b) Wir werden später sehen, dass die schwache Topologie bei jedem unendlich-dimensionalen reflexiven Banach-Raum echt verschieden ist von der Normtopologie. Hier schon mal ein Beispiel. Sei $V = \ell^2(\mathbb{N})$ und sei $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in V$ mit der 1 an der n-ten Stelle. Dann gilt $\|e_n\| = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, aber wir zeigen, dass die Folge (e_n) schwach gegen 0 geht. Damit ist die schwache Topologie echt verschieden von der Normtopologie. Um zu zeigen, dass $e_n \to 0$ gilt, müssen wir zeigen, dass $\alpha(e_n) \to 0$ gilt für jedes $\alpha \in V'$. Sei also $\alpha \in V'$. Dann gibt es nach dem Satz von Riesz genau ein $w \in V$ mit $\alpha(v) = \langle v, w \rangle$ für jedes $v \in V$. Insbesondere also $\alpha(e_n) = w_n$. Nun gilt aber $\sum_{j=1}^\infty |w_j|^2 = \|w\|^2 < \infty$, also geht die Folge w_j gegen Null, also geht $\alpha(e_n)$ gegen Null.

Erinnerung: Eine Abbildung $f : X \to V$ von einem topologischen Raum X nach V ist genau dann stetig bezüglich der schwachen Topologie, wenn $\alpha \circ f : X \to \mathbb{C}$ für jedes $\alpha \in V'$ stetig ist.

Jede schwach offene Menge ist auch offen in der Norm-Topologie, aber nicht umgekehrt, die Norm-Topologie hat also mehr offene Mengen.

Ist $A \subset V$, so bezeichnet wie bisher $\overline{A}$ den Abschluss in der Norm-Topologie. Den Abschluss in der schwachen Topologie bezeichnen wir mit $\overline{A}^w$. Da die schwache Topologie weniger offene Mengen hat als die Norm-Topologie, hat sie auch weniger abgeschlossenen Mengen, also gilt immer

$$\overline{A}^w \supset \overline{A}.$$

Satz 2.6.3. *Sei $K \subset V$ eine konvexe Teilmenge des Banach-Raums V. Dann ist der schwache Abschluss gleich dem Norm-Abschluss, also*

$$\overline{K}^w = \overline{K}.$$

Beweis. Die Inklusion $\overline{K} \subset \overline{K}^w$ gilt sowieso. Für die umgekehrte Inklusion sei $v \in V \setminus \overline{K}$, wir zeigen $v \notin \overline{K}^w$. Nach Satz 2.1.7 gibt es ein $\alpha \in V'$ und $S \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathrm{Re}(\alpha(v)) < S \le \mathrm{Re}(\alpha(w))$$

für jedes $w \in \overline{K}$. Daher ist die Menge $\left\{u \in V : \mathrm{Re}(\alpha(u)) < S\right\}$ eine schwache Umgebung von v, die $\overline{K}$ nicht trifft. Also liegt v nicht im schwachen Abschluss von $\overline{K}$ und also auch nicht in $\overline{K}^w$. □

Satz 2.6.4. *Sei V ein Banach-Raum. Sei (v_n) eine Folge in V, die schwach gegen $v \in V$ konvergiert. Dann existiert eine Folge (w_j) in V so dass*

- *jedes w_j ist eine Konvexkombination von endlich vielen v_n und*

- *$w_j \to v$ in der Norm.*

Genauer heisst das, dass es für jedes $j \in \mathbb{N}$ Zahlen $a_{n,j} \geq 0$ gibt, so dass für jedes j nur endlich viele $a_{n,j} \neq 0$ sind und so dass gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} = 1, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} v_n = w_j.$$

Beweis. Sei K die konvexe Hülle aller v_n und sei $\mathcal{W}$ der schwache Abschluss von K. Dann liegt v in $\mathcal{W}$. Da K konvex ist, gilt $\mathcal{W} = \overline{K}$, also gibt es eine Folge in K, die gegen v konvergiert. □

Beispiel 2.6.5. Wir wenden dies auf die Folge e_n in $V = \ell^2(\mathbb{N})$ an. Es gibt demnach eine Konvexkombination v_n der e_k so dass $\|v_n\| \to 0$. In der Tat, sei

$$v_n = \frac{1}{n}(e_1 + \cdots + e_n),$$

so gilt $\|v_n\|^2 = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$.

Definition 2.6.6. Sei V ein Banach-Raum und V' sein stetiger Dualraum. Die **schwach-*-Topologie** auf V' ist die Topologie erzeugt von allen Abbildungen

$$\delta_v : V' \to \mathbb{C}, \qquad v \in V.$$

Satz 2.6.7 (Banach-Alaoglu)**.** *Der abgeschlossene Einheitsball in V' ist schwach-*-kompakt.*

Genauer sei V ein Banach-Raum und V' sein stetiger Dual. Sei $\|\cdot\|$ die Norm auf V' und sei

$$B' = \{\alpha \in V' : \|\alpha\| \leq 1\}.$$

Dann ist B' kompakt in der schwach--Topologie.*

Beweis. Sei $\mathbb{E}$ die Menge aller $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| \leq 1$. Betrachte die Abbildung $\phi : B' \to X := \prod_{v \in V} \|v\| \, \mathbb{E}$ gegeben durch

$$\alpha \mapsto (\alpha_v)_{v \in V}, \qquad \alpha_v = \alpha(v).$$

Der Raum X ist nach dem Satz von Tychonov kompakt. Die schwach-*-Topologie ist die Initialtopologie der Abbildung ϕ, welche injektiv ist, also B' mit einer Teilmenge von X identifiziert. Wir müssen nur zeigen, dass diese Teilmenge abgeschlossen ist. Sei $F \subset X$ die Teilmenge aller $\alpha \in X$ so dass für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\alpha_{\lambda v + \mu w} = \lambda \alpha_v + \mu \alpha_w.$$

Dann ist F abgeschlossen in der Produkttopologie. Nun ist $F \subset X$ aber gerade das Bild von ϕ, welches damit abgeschlossen ist. □

Korollar 2.6.8. *Ist V ein reflexiver Banach-Raum, dann ist die Einheitskugel $B = B_1(0)$ in V schwach kompakt.*

Beweis. Sei $W = V'$, dann ist B die Einheitskugel in W', also schwach-*-kompakt. Die schwach-*-Topologie auf W' ist aber die Topologie erzeugt von $W = V'$, also gleich der schwachen Topologie. □

Beachte, dass bei nicht-reflexiven Banach-Räumen W die schwache Topologie auf W' nicht mit der schwach-*-Topologie übereinstimmen muss.

Definition 2.6.9. Sei c_0 der Vektorraum aller Nullfolgen in $\mathbb{C}$. Durch

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

wird c_0 ein Banach-Raum.

Korollar 2.6.10. (a) *Ist V ein unendlich-dimensionaler reflexiver Banach-Raum, dann ist die Norm-Topologie verschieden von der schwachen.*

(b) *Die Einheitskugel von c_0 ist nicht schwach-kompakt. Der Banach-Raum c_0 ist kein Dualraum eines Banach-Raums.*

Beweis. (a) In der Norm-Topologie ist die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt.

(b) Man macht sich klar, dass der Satz von Krein-Milmann 2.2.6 auch in der Schwachen und der schwach-* Topologie gilt. Im Beweis wird nur die Existenz von stetigen linearen Funktionalen verlangt, die Punkte trennen. Waere also die abgeschlossene Einheitskugel B schwach kompakt oder waere c_0 ein Dualraum und somit B schwach-*-kompakt, dann haette nach Krein-Milman die Kugel B Extremalpunkte. Wir zeigen, dass sie keine hat. Sei $x \in B$. Dann gibt es einen Index m mit $|x_m| < \frac{1}{2}$. Sei dann $h \in c_0$ definiert durch

$$h_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = m, \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

Dann folgt $\|x \pm h\| \leq 1$ und $x = \frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)$ ist also kein Extremalpunkt. □

Beispiel 2.6.11. Betrachte den Banach-Raum $V = C[0,1]$ und das stetige lineare Funktional

$$\alpha : f \mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx.$$

Dann ist die Norm von α gleich 1, aber $|\alpha(f)| < \left\|f\right\|_{[0,1]}$ gilt fuer jedes $f \in C[0,1]$, d.h., α nimmt seine Norm auf dem Einheitsball von V nicht an, der Einheitsball ist also nicht schwach-kompakt.

Beweis. Sei $f \in V$ mit $\left\|f\right\|_{[0,1]} = 1$. Waere $|\alpha(f)| = 1$, also ohne Einschraenkung $\alpha(f) = 1$, dann muss $f \equiv 1$ fast ueberall auf $[0, \frac{1}{2}]$ sein und $f \equiv -1$ fast ueberall auf $[\frac{1}{2}, 1]$. Dann kann f aber nicht stetig sein. □

Satz 2.6.12. *Ist (v_j) eine Folge paarweise orthogonaler Vektoren in einem Hilbert-Raum H, so sind äquivalent:*

(a) $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ *konvergiert in der Normtopologie,*

(b) $\sum_{j=1}^{\infty} v_j$ *konvergiert schwach,*

(c) $\sum_{j=1}^{\infty} \left\|v_j\right\|^2 < \infty.$

Beweis. (a)→(b) ist klar.

(b)→(c): Da die v_j paarweise orthogonal sind, gilt

$$\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2 .$$

Da die Folge $v_1 + \cdots + v_n$ schwach konvergiert, ist sie normbeschränkt, damit folgt (c).

(c)→(a): Wieder wegen $\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2$ ist $\sum_{j=1}^{n} v_j$ eine Cauchy-Folge, also konvergent. □

* * *

3 Stetige Operatoren auf Hilbert-Räumen

3.1 Adjungierte Operatoren

Für einen Hilbert-Raum H schreiben wir $\mathcal{B}(H)$ für den Banach-Raum aller stetigen Operatoren $T : H \to H$.

Satz 3.1.1. *Sei H ein Hilbert-Raum und $T \in \mathcal{B}(H)$.*

(a) *Es gibt genau einen linearen Operator T^* auf H so dass für alle $v, w \in H$ gilt*

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle .$$

Dieser heisst der **adjungierte Operator** *zu T. Ein Operator T heisst* **selbstadjungiert**, *falls $T^* = T$ gilt.*

(b) *Der Operator T^* ist ebenfalls beschraenkt. Genauer gilt $\|T^*\|_{\mathrm{op}} = \|T\|_{\mathrm{op}} = \sqrt{\|T^*T\|_{\mathrm{op}}}$.*

(c) *Für $S, T \in \mathcal{B}(H)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt*

$$(\lambda S + \mu T)^* = \overline{\lambda} S^* + \overline{\mu} T^*, \quad (ST)^* = T^* S^*, \quad (T^*)^* = T.$$

(d) *Es gilt*

$$T \text{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad T^* \text{ invertierbar.}$$

In diesem Fall gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Beweis. (a) Sei $w \in H$ fest. Das lineare Funktional $\alpha(v) = \langle Tv, w \rangle$ ist als Komposition stetiger Abbildungen stetig, also existiert genau ein Vektor $u = T^* w$ so dass für jedes $v \in H$ gilt

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle .$$

Die so definierte Abbildung $w \mapsto T^* w$ ist schnell als linear erkannt, es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} \langle v, T^*(w + w') \rangle &= \langle Tv, w + w' \rangle = \langle Tv, w \rangle + \langle Tv, w' \rangle \\ &= \langle v, T^* w \rangle + \langle v, T^* w' \rangle = \langle v, T^* w + T^* w' \rangle , \end{aligned}$$

so dass die Eindeutigkeit im Rieszschen Satz die Gleichung $T^*(w + w') = T^* w + T^* w'$ impliziert. Die Skalarmultiplikation $T^*(\alpha w) = \alpha T^* w$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ geht ebenso.

(b) Wir zeigen zuerst: T^* ist beschränkt und $T^{**} = T$. Sei hierzu für $w \in H$ das Funktional α_w definiert als

$\alpha_w(v) = \langle v, w\rangle$. Wir stellen nun fest, dass für die Norm dieses Funktionals gilt

$$\|\alpha_w\| = \|w\|\,.$$

Dies folgt einerseits aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, die besagt

$$|\alpha_w(v)| = |\,\langle v, w\rangle\,| \le \|v\|\,\|w\|$$

und andererseits aus $\alpha_w(w) = \|w\|^2$. Beachte nun $\alpha_{T^*w}(v) = \langle v, T^*w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \alpha_w \circ T(v)$. Daher folgt

$$\|T^*w\| = \|\alpha_{T^*w}\| = \|\alpha_w \circ T\| \le \|w\|\,\|T\|\,.$$

Also gilt $\|T^*\| \le \|T\|$. Damit ist auch T^* beschraenkt und man kann T und T^* vertauschen um auch $\|T\| \le \|T^*\|$ zu erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned}\|Tv\|^2 &= \langle Tv, Tv\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle = \|T^*Tv\|\,\|v\|\\ &\le \|T^*T\|\,\|v\|^2 \le \|T^*\|\,\|T\|\,\|v\|^2 = (\|T\|\,\|v\|)^2.\end{aligned}$$

Also $\|T\|^2 \le \|T^*T\| \le \|T\|^2$, was bedeutet $\|T\| = \sqrt{\|T^*T\|}$. Teil (c) ist leicht nachzurechnen.

(d) Fuer "$\Rightarrow$" sei T invertierbar. Dann gilt

$$\mathrm{Id} = \mathrm{Id}^* = (T^{-1}T)^* = T^*(T^{-1})^*$$

und ebenso

$$\mathrm{Id} = \mathrm{Id}^* = (TT^{-1})^* = (T^{-1})^*T^*.$$

Zusammen folgt, dass T^* invertierbar ist mit Inverser $(T^{-1})^*$. Die Rueckrichtung folgt durch Vertauschen von T und T^*. □

Beispiele 3.1.2. (a) Sei $H = \mathbb{C}^n$ mit dem üblichen Skalarprodukt. Dann ist jeder lineare Operator auf H durch eine Matrix A gegeben und es gilt $A^* = \overline{A}^t$ wie man in der Linearen Algebra sieht.

(b) Sei $H = \ell^2(\mathbb{N})$ und sei $k : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $C = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} |k(i, j)|^2 < \infty$. Dann definiert k einen linearen Operator T_k durch

$$T_k\phi(i) = \sum_{j=1}^{\infty} k(i, j)\phi(j),$$

wobei wir jetzt Elemente von $\ell^2(\mathbb{N})$ als Abbildungen $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ mit $\sum_j |\phi(j)|^2 < \infty$ auffassen. Nach der Hoelder-Ungleichung gilt dann

$$\left\|T_k\phi\right\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left|\sum_{j=1}^{\infty} k(i, j)\phi(j)\right|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |k(i, j)|^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} |\phi(\nu)|^2 = C \left\|\phi\right\|^2.$$

Damit ist T_k wohldefiniert und stetig. Wir behaupten, dass sein adjungierter Operator T_k^* gegeben ist durch den Kern

$$k^*(i, j) = \overline{k(j, i)}.$$

Zum Beweis rechnen wir für $\phi, \psi \in \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\begin{aligned}\left\langle \phi, T_{k^*}\psi \right\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi(i)\overline{T_{k^*}\psi(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(i) \sum_{j=1}^{\infty} \overline{k^*(i,j)\psi(j)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi(i) \sum_{j=1}^{\infty} k(j,i)\overline{\psi(j)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} k(j,i)\phi(i)\overline{\psi(j)} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} T_k\phi(j)\overline{\psi(j)} = \left\langle T_k\phi, \psi \right\rangle.\end{aligned}$$

* * *

3.2 Normale Operatoren

Definition 3.2.1. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ heisst **normal**, falls $TT^* = T^*T$.

Beispiele 3.2.2. (a) Jeder selbstadjungierte Operator ist normal.

(b) Eine Matrix $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ ist genau dann normal, wenn es ein $k \in U(n)$ und eine Diagonalmatrix D gibt, so dass $A = kDk^{-1}$ gilt.

Satz 3.2.3. *Ein Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ ist genau dann normal, wenn*

$$\|Tv\| = \|T^*v\|$$

für jedes $v \in H$ gilt. Für einen normalen Operator T gilt

(a) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Ker}(T^*)$,

(b) *das Bild* $\mathrm{Bild}(T)$ *ist genau dann dicht in H, wenn T injektiv ist,*

(c) *T ist genau dann invertierbar, wenn es ein $\delta > 0$ gibt so dass $\|Tv\| \geq \delta\,\|v\|$ für jedes $v \in H$,*

(d) *gilt $Tv = \lambda v$ für ein $v \in H$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, dann folgt $T^*v = \overline{\lambda}v$,*

(e) *sind λ und μ verschiedene Eigenwerte von T, dann stehen die zugehörigen Eigenräume senkrecht aufeinander.*

Beweis. Ist T normal, so gilt

$$\|Tv\|^2 = \langle Tv, Tv\rangle = \langle v, T^*Tv\rangle = \langle v, TT^*v\rangle = \langle T^*v, T^*v\rangle = \|T^*v\|^2.$$

Ist umgekehrt $\|Tv\| = \|T^*v\|$, so folgt aus der Polarisierungsidentität, dass für alle $v, w \in H$ die Gleichung

$\langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*v, T^*w\rangle$ gilt. Also folgt

$$\langle T^*Tv, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*v, T^*w\rangle = \langle TT^*v, w\rangle\,,$$

so dass $T^*T = TT^*$ folgt.

(a) Sei $v \in \mathrm{Ker}(T)$, so folgt $0 = \|Tv\| = \|T^*v\|$, also $v \in \mathrm{Ker}(T^*)$. Die Rückrichtung folgt aus Symmetrie.

(b) Sei das Bild dicht, so ist wegen $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ der Operator T^* injektiv. Wegen $\|Tv\| = \|T^*v\|$ ist dann T injektiv. Sei umgekehrt T (und also T^*) injektiv und sei $u \in \mathrm{Bild}(T)^\perp$. Für jedes $w \in H$ folgt $0 = \langle u, Tw\rangle = \langle T^*u, w\rangle$, also $u \in \mathrm{Ker}(T^*)$, somit $u = 0$.

(c) Es existiere solch ein δ. Ist dann (Tv_j) eine Cauchy-Folge im Bild, dann ist (v_j) eine Cauchy-Folge, also konvergent gegen ein $u \in H$. Dann ist Tu der Limes der Folge (Tv_j), also ist das Bild abgeschlossen. Da T injektiv ist, folgt nach (b), dass T surjektiv, also bijektiv ist.

Sei umgekehrt T invertierbar, dann folgt $\|v\| = \left\|T^{-1}Tv\right\| \le \left\|T^{-1}\right\| \|Tv\|$, man kann also $\delta = 1/\left\|T^{-1}\right\|$ nehmen.

(d) Es gelte $Tv = \lambda v$ und es sei $v \neq 0$, so folgt $T(T^*v) = T^*Tv = \lambda T^*v$, also liegt T^*v wieder im T-Eigenraum zum Eigenwert λ. Sei w ein weiterer Vektor in diesem Eigenraum, so gilt $\langle T^*v, w\rangle = \langle v, Tw\rangle = \langle v, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\,\langle v, w\rangle = \left\langle \overline{\lambda}v, w\right\rangle$. Da dies für jedes w aus dem Eigenraum gilt, folgt $T^*v = \overline{\lambda}v$.

(e) Sind λ und μ zwei verschiedene Eigenwerte. Seien v und w zugehörige Eigenvektoren, so gilt $\lambda\,\langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle = \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle = \langle v, \overline{\mu}w\rangle = \mu\,\langle v, w\rangle$, also $\langle v, w\rangle = 0$. □

Beispiele 3.2.4. (a) In der Linearen Algebra lernt man, dass jeder normale Operator auf dem $\mathbb{C}^n$ diagonalisierbar ist, dass also $\mathbb{C}^n$ eine Basis von Eigenvektoren besitzt.

(b) Jeder Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ kann als Linearkombination von selbstadjungierten Operatoren geschrieben werden:

$$T = \mathrm{Re}(T) + i\,\mathrm{Im}(T),$$

wobei $\mathrm{Re}(T) = \frac{1}{2}(T + T^*)$ und $\mathrm{Im}(T) = \frac{1}{2i}(T - T^*)$. Es ist dann

$$T^* = \mathrm{Re}(T) - i\,\mathrm{Im}(T)$$

und T ist genau dann normal, wenn je zwei der drei Operatoren $T, \mathrm{Re}(T), \mathrm{Im}(T)$ miteinander kommutieren.

* * *

3.3 Isometrien

Definition 3.3.1. Der Operator T auf einem Hilbert-Raum heisst **unitär**, falls

$$TT^* = T^*T = \mathrm{Id}$$

gilt.

Satz 3.3.2. *Der Operator $T : H \to H$ ist genau dann unitär, wenn er ein isometrischer Isomorphismus ist.*

Beweis. Ist T unitär, dann ist er isometrisch, denn es gilt dann

$$\langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*Tv, w\rangle = \langle v, w\rangle .$$

Er ist ferner surjektiv, da invertierbar.

Sei nun T isometrisch und surjektiv. Da T isometrisch ist, ist T injektiv, also zusammen bijektiv. Für $v, w \in H$ gilt

$$\langle v, w\rangle = \langle Tv, Tw\rangle = \langle T^*Tv, w\rangle .$$

Also folgt $T^*T = \mathrm{Id}$, damit ist T^* eine Linksinverse zu T. Da T invertierbar ist, ist T^* auch eine Rechtsinverse, T also unitär. □

Beispiele 3.3.3. (a) Auf $\ell^2(\mathbb{N})$ sei T definiert durch

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots).$$

Dann folgt $\|Tx\|^2 = \|x\|^2$, also ist T eine Isometrie, aber da $e_1 \notin \mathrm{Bild}(T)$, ist T nicht surjektiv, also nicht unitär. Der Operator T wird der **Shiftoperator** genannt. Man sieht leicht, dass

$$T^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$$

und damit folgt $T^*T = \mathrm{Id}$. Man sieht also, dass die Identität $T^*T = \mathrm{Id}$ allein nicht zur Unitarität ausreicht!

(b) Auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ ist der Shiftoperator

$$T(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, \dots),$$

also $(Tx)_k = x_{k-1}$, unitär.

(c) Ist $f \in L^1(\mathbb{R})$, so ist die **Fourier-Transformierte**

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i x y}\, dy$$

definiert. Ist $f \in L^1 \cap L^2$, so besagt der **Satz von Plancherel**:

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2,$$

wobei $\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx$ die L^2-Norm ist. Der Raum $L^1 \cap L^2$ liegt dicht in L^2 und daher setzt die Fourier-Transformation zu einer Isometrie auf dem Hilbert-Raum $L^2(\mathbb{R})$ aus. Man zeigt, dass die Fourier-Transformierte in der Tat unitär ist mit

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

(d) Eine $n \times n$ Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist als Operator auf $\mathbb{C}^n$ genau dann unitär, wenn $A^* = A^{-1}$, wobei $A^* = \overline{A}^t$.

* * *

3.4 Projektionen

Erinnerung: Ein stetiger Operator P auf einem Hilbert-Raum H ist eine **Projektion** oder ein **Projektionsoperator**, falls gilt

$$P^2 = P.$$

Fuer jede Projektion P gilt

$$H = \ker(P) \oplus \mathrm{Bild}(P).$$

Satz 3.4.1. *Sei P eine Projektion auf einem Hilbert-Raum H. Stehen Kern und Bild senkrecht aufeinander, so nennen wir P eine* **Orthogonalprojektion**.

(a) *Jede Orthogonalprojektion ist stetig.*

(b) *Fuer eine Projektion P sind aequivalent:*

   (i) *P ist eine Orthogonalprojektion.*

   (ii) *P ist selbstadjungiert.*

   (iii) *P ist normal.*

Beweis. Uebungsaufgabe. □

Beispiele 3.4.2. (a) Ist $v_0 \in H$ mit $\|v_0\| = 1$, dann ist die Abbildung

$$P(v) = \langle v, v_0 \rangle \, v_0$$

die Orthogonalprojektion auf den eindimensionalen Unterraum $U = \mathbb{C}v_0$.

(b) Sei $H = L^2([0,1])$ und sei $A \subset [0,1]$ eine messbare Teilmenge. Die Abbildung $P_A : H \to H$ definiert durch

$$P_A\phi(x) = \mathbf{1}_A(x)\phi(x)$$

ist eine Orthogonalprojektion, deren mit Bild isomorph zu $L^2(A)$ ist.

(c) Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also ein Maßraum mit $\mu(X) = 1$ und sei $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ eine Unter-σ-Algebra. Der Raum $L^2(\mu|_{\mathfrak{B}})$ aller $\mathfrak{B}$-messbaren L^2-Funktionen ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mu)$. Sei $P_{\mathfrak{B}}$ die Orthogonalprojektion mit Bild $L^2(\mu|_{\mathfrak{B}})$. In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist $P_{\mathfrak{B}}$ als **bedingter Erwartungswert** bekannt. Als Beispiel betrachten wir den Fall $\mathfrak{B} = \{\emptyset, X\}$. Dann ist $L^2(\mu|_{\mathfrak{B}})$ der Raum der konstanten Funktionen und daher ist

$$P_{\mathfrak{B}}(\phi) = \left\langle \phi, 1 \right\rangle \cdot 1 = \int_X \phi(x)\, d\mu(x) \cdot 1.$$

Lemma 3.4.3. *Für eine Orthogonalprojektion P gilt $\|P(v)\| \le \|v\|$ und*

$$\|Pv\| = \|v\| \quad \Leftrightarrow \quad Pv = v.$$

Beweis. klar. □

Satz 3.4.4. *Seien P_1, P_2 Orthogonalprojektionen auf einem Hilbert-Raum H. Seien V_1 und V_2 die Bildräume, also $P_i(H) = V_i$. Dann sind äquivalent:*

(a) $V_1 \perp V_2$,

(b) $P_1P_2 = 0$,

(c) $P_1 + P_2$ *ist eine Projektion.*

Ist dies erfüllt, dann ist $P_1 + P_2$ eine Orthogonalprojektion mit Bild $V_1 \oplus V_2$.

Beweis. (c)→(b): Es gilt

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2 + P_1P_2 + P_2P_1,$$

also ist $P_1P_2 + P_2P_1 = 0$. Wir multiplizieren einmal von links und einmal von rechts mit P_1 und erhalten $P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0 = P_2P_1 + P_1P_2P_1$, also $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

(b)→(a): Die Gleichung $P_1P_2 = 0$ bedeutet, dass V_2, das Bild von P_2, im Kern von P_1, also in $V_1^\perp$ liegt. Daher folgt $V_1 \perp V_2$.

(a)→(c): Es gilt $(V_1 \oplus V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$ und also

$$H = V_1 \perp V_2 \perp (V_1^\perp \cap V_2^\perp).$$

Sei $v = v_1 + v_2 + w \in H$ in dieser Zerlegung geschrieben. Sei Q die Orthogonalprojektion mit Bild $V_1 \oplus V_2$, so gilt $Q(v) = v_1 + v_2$. Andererseits ist auch $(P_1 + P_2)(v) = v_1 + v_2$. □

Satz 3.4.5. *Seien P_i, V_i wie im letzten Satz. Dann sind äquivalent:*

(a) $V_1 \subset V_2$,

(b) $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$,

(c) $P_2 - P_1$ *ist eine Projektion.*

Ist dies erfüllt, dann ist $P_2 - P_1$ eine Orthogonalprojektion mit Bild $V_2 \cap V_1^\perp$.

Beweis. (a)→(b): Sei $V_3 = V_2 \cap V_1^\perp$. Dann ist $V_2 = V_1 \perp V_3$ und $H = V_1 \perp V_3 \perp V_2^\perp$. Zerlege ein gegebenes $v \in H$ entsprechend $v = v_1 + v_3 + v_2$. Dann ist $P_1P_2(v) = P_1(v_1 + v_3) = v_1 = P_1(v) = P_2P_1(v)$.

(b)→(c): Es ist $(P_2 - P_1)^2 = P_2^2 + P_1^2 - P_1P_2 - P_2P_1 = P_2 + P_1 - P_1 - P_1 = P_2 - P_1$.

(c)→(a): Sei $v \in V_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} P_2(v) - v &= (P_2 - P_1)(v) = (P_2 - P_1)^2(v) \\ &= P_2(v) + v - P_2(v) - P_1P_2(v) = v - P_1P_2(v), \end{aligned}$$

also $(1 + P_1)P_2(v) = 2v$. Wenden wir hierauf P_1 an, erhalten wir $P_1P_2(v) = v$, woraus nach Lemma 3.4.3 folgt $P_2(v) = v$. □

Satz 3.4.6. *Seien P, Q Orthogonalprojektionen auf dem Hilbert-Raum H. Dann sind äquivalent:*

(a) *PQ ist Projektion,*

(b) $PQ = QP$,

(c) *Es gibt eine Orthogonalzerlegung*

$$H = H_0 \oplus U \oplus V \oplus W,$$

so dass

$$P(h + u + v + w) = u + v, \quad \text{und} \quad Q(h + u + v + w) = v + w$$

gilt, falls $h \in H_0$, $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$.

In diesem Fall ist PQ eine Orthogonalprojektion mit Bild V.

Beweis. Übungsaufgabe. □

* * *

3.5 Starke und schwache Topologie

Auf dem Raum $\mathcal{B}(H)$ aller beschraenkten Operatoren auf dem Hilbert-Raum H gibt es neben der Topologie der Operatornorm, also der **Normtopologie** noch zwei weitere Topologien, die Erwaehnung verdienen, die starke und die schwache Topologie.

Definition 3.5.1. Sei H ein Hilbert-Raum. Die **starke Operator-Topologie** auf $\mathcal{B}(H)$ ist die Topologie induziert durch die Abbildungen

$$N_v : T \mapsto \|Tv\|$$

wobei $v \in H$ laeuft. Das bedeutet, dass die Mengen

$$U = U(v_1, \dots, v_n; \varepsilon) = \left\{ T \in \mathcal{B}(H) : \max_{j=1}^{n} \left\| Tv_j \right\| < \varepsilon \right\}$$

eine Nullumgebungsbasis bilden, wobei $v_1, \dots, v_n \in H$ und $\varepsilon > 0$ ist.

Definition 3.5.2. Die **schwache Operator-Topologie** auf $\mathcal{B}(H)$ ist die Topologie induziert durch alle Abbildungen der Form

$$\psi_{v,w} : T \mapsto \langle Tv, w \rangle ,$$

wobei v, w durch H laufen.

Proposition 3.5.3. *Sei $(T_i)_{i\in I}$ eine Folge in $\mathcal{B}(H)$. Dann gilt*

$$T_i \to T \text{ in der Norm} \quad \Rightarrow \quad T_i \to T \text{ stark} \quad \Rightarrow \quad T_i \to T \text{ schwach.}$$

Beweis. Dies folgt sofort aus den Abschaetzungen

$$\begin{aligned} |\langle T_i v, w\rangle - \langle Tv, w\rangle| &= |\langle T_i v - Tv, w\rangle| \\ &\le \|T_i v - Tv\| \, \|w\| \\ &\le \|T_i - T\|_{\mathrm{op}} \, \|v\| \, \|w\| . \end{aligned}$$

□

Beispiele 3.5.4.

(a) Sei $H = \ell^2(\mathbb{N})$ und sei T_n die Orthogonalprojektion auf den von den ersten Basisvektoren $e_1, \dots, e_n$

aufgespannten Unterraum. Dann gilt fuer $v \in H$, dass

$$\|T_n v - v\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |v_j|^2 \;\to\; 0.$$

fuer $n \to \infty$. Also konvergiert (T_n) gegen Id in der starken Operatortopologie, aber nicht in der Normtopologie, denn $\|T_n - \mathrm{Id}\|_{\mathrm{op}} = 1$ fuer jedes $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sei wieder $H = \ell^2(\mathbb{N})$ und sei

$$T_n : (v_1, v_2, \dots) \;\to\; (0, \dots, 0, v_1, v_2, \dots)$$

die Verschiebung um n Einheiten. Fuer $v, w \in H$ gilt

$$|\langle T_n v, w\rangle|^2 = \left|\sum_{j=1}^{\infty} v_j \overline{w_{j+n}}\right|^2 \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |v_j|^2\right)\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |w_j|^2\right) \;\to\; 0.$$

Daher konvergiert (T_n) in der schwachen Operator-Topologie gegen Null, nicht aber in der starken, denn $\|T_n v\| = \|v\|$ gilt fuer alle v und alle n.

* * *

4 Der Spektralsatz

4.1 Spektrum

Definition 4.1.1. Sei T ein stetiger linearer Operator auf einem Hilbert-Raum H. Das **Spektrum** ist die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die der Operator

$$T - \lambda = T - \lambda \,\mathrm{Id}$$

nicht invertierbar ist

Beispiel 4.1.2. Ist H endlich-dimensional, dann besteht $\sigma(T)$ genau aus den Nullstellen des charakteristischen Polynoms, es ist dann also

$$\sigma(T) = \text{ Menge der Eigenwerte von } T.$$

Definition 4.1.3. Sei T ein stetiger Operator auf einem Hilbert-Raum H. Ist $\mathrm{Ker}(T - \lambda) \neq 0$, so heisst λ **Eigenwert** von T.

Es gibt auch Spektralwerte, die keine Eigenwerte sind. In diesem Fall ist $T - \lambda$ zwar injektiv, nicht aber surjektiv.

Beispiel 4.1.4. Multiplikationsoperator Sei $H = L^2[0, 1]$ und sei $T : H \to H$ gegeben durch

$$T(f)(t) = tf(t).$$

Wir behaupten, dass T keine Eigenwerte hat, das Spektrum aber aus dem ganzen Intervall $[0, 1]$ besteht.

Beweis. Zum ersten sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in H$ mit $(T - \lambda)f = 0$. Das heisst, dass

$$0 = (T - \lambda)f(t) = tf(t) - \lambda f(t) = (t - \lambda)f(t)$$

fast überall in $t \in T$ gilt. Für $t \neq \lambda$ heisst das aber $f(t) = 0$, also $f = 0$ fast überall.

Zum zweiten sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, 1]$, dann ist T invertierbar, der Inverse Operator ist S mit

$$S(f)(t) = \frac{1}{t - \lambda} f(t).$$

Schliesslich sei $\lambda \in [0, 1]$. **Angenommen,** $T - \lambda$ wäre surjektiv. Dann gäbe es $f \in L^2(0, 1)$ mit $(T - \lambda)(f) = 1$ (konstante Funktion). Es wäre also $(t - \lambda)f(t) = 1$ fast überall, also

$$f(t) = \frac{1}{t - \lambda}$$

fast überall. Diese Funktion liegt aber nicht in L^2. **Widerspruch!** □

Lemma 4.1.5. *Für einen stetigen Operator T auf einem Hilbert-Raum H gilt*

$$\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}.$$

Beweis. Nach Satz 3.1.1 ist ein Operator S genau dann invertierbar, wenn S^* invertierbar ist. Wegen $(T^* - \lambda) = \left(T - \overline{\lambda}\right)^*$ folgt, dass λ genau dann im Spektrum von T^* liegt, wenn $\overline{\lambda}$ im Spektrum von T ist. □

Definition 4.1.6. Die **Einheitengruppe** von $\mathcal{B}(H)$ ist die Gruppe $\mathcal{B}(H)^\times$ aller invertierbaren Operatoren in $\mathcal{B}(H)$.

Satz 4.1.7.

(a) *Die Einheitengruppe $\mathcal{B}(H)^\times$ ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{B}(H)$. Die Inversion $T \mapsto T^{-1}$ ist eine stetige Abbildung $\mathcal{B}(H)^\times \to \mathcal{B}(H)^\times$.*

(b) *Die Abbildung $\phi_T : \mathbb{C} \to \mathcal{B}(H)$ mit*

$$\phi_T(\lambda) = T - \lambda$$

ist stetig. Das Spektrum $\sigma(T)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(c) *Das Spektrum von $T \in \mathcal{B}(H)$ ist eine Teilmenge der abgeschlossenen Kreisscheibe $B_{\|T\|}(0) \subset \mathbb{C}$. Insbesondere ist das Spektrum kompakt.*

Beweis. (a) Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{B}(H)^\times$ eine offene Umgebung der Identität enthält. Genauer zeigen wir $B_1(\mathrm{Id}) \subset \mathcal{B}(H)^\times$. Der Einfachheit halber schreiben wir $\mathrm{Id} = 1$. Es ist

$$B_1(1) = \{T : \|T - 1\| < 1\} = \{1 - R : \|R\| < 1\}.$$

Sei also $R \in \mathcal{B}(H)$ mit $\|R\| < 1$. Wir müssen zeigen, dass $1 - R$ invertierbar ist. Die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \|R\|^n$ konvergiert in $\mathbb{C}$. Also konvergiert die **geometrische Reihe**

$$S = \sum_{n=0}^\infty R^n$$

absolut in $\mathcal{B}(H)$. Es ist

$$(1 - R)S = S(1 - R) = (1 - R)\sum_{n=0}^\infty R^n = \sum_{n=0}^\infty R^n - \sum_{n=0}^\infty R^{n+1} = 1.$$

Ist nun $T \in \mathcal{B}(H)^\times$ beliebig, dann liegt die Menge $TB_1(1)$ ganz in $\mathcal{B}(H)^\times$. Wir behaupten, dass $TB_1(1)$ eine Umgebung von T ist:

$$TB_1(1) = \{T - TR : \|R\| < 1\} \supset \{T - Z : \|Z\| < \frac{1}{\left\|T^{-1}\right\|}\} = B_{1/\|T^{-1}\|}(T).$$

Also ist $\mathcal{B}(H)^\times$ offen.

Nun zur Stetigkeit der Inversion: Wir zeigen, dass die Inversion die Menge $B_1(1)$ in sich wirft und dort stetig ist. Hieraus folgt die Behauptung, denn auf der offenen Menge $B_1(1)T_0$ ist die Inversion eine Komposition stetiger Abbildungen:

$$T \mapsto TT_0^{-1} \mapsto T_0T^{-1} \mapsto T^{-1}.$$

Es reicht also zu zeigen, dass die Inversion auf $B_1(1)$ stetig ist. Seien hierzu $S, T \in \mathcal{B}(H)$ mit $\|S\|, \|T\| \le c < 1$. Dann folgt

$$\left\|(1-S)^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^\infty S^n\right\| \le \sum_{n=0}^\infty \|S\|^n \le \sum_{n=0}^\infty c^n = \frac{1}{1-c}$$

und ebenso fuer T. Damit folgt

$$\begin{aligned}\left\|(1-S)^{-1} - (1-T)^{-1}\right\| &= \left\|(1-S)^{-1}\big(S-T\big)(1-T)^{-1}\right\| \\ &\le \left\|(1-S)^{-1}\right\| \, \|S-T\| \, \left\|(1-T)^{-1}\right\| \\ &\le \frac{1}{(1-c)^2}\,\|S-T\|\end{aligned}$$

Geht nun S gegen T, dann geht auch $(1-S)^{-1}$ gegen $(1-T)^{-1}$, die Inversion ist also stetig.

(b) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt

$$\left\|\phi_T(\lambda) - \phi_T(\mu)\right\| = \left\|\mu - \lambda\right\| = |\lambda - \mu|,$$

also ist ϕ_T stetig. Das Spektrum ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathcal{B}(H) \smallsetminus \mathcal{B}(H)^\times$, also abgeschlossen.

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$. Wir müssen zeigen, dass $\lambda \notin \sigma(T)$, also dass $T - \lambda$ invertierbar ist. Es ist $T - \lambda = \lambda(\frac{1}{\lambda}T - 1)$ und für den Operator $R = \frac{1}{\lambda}T$ gilt $\|R\| = \frac{1}{|\lambda|}\|T\| < 1$, also ist $R - 1$, und damit auch $T - \lambda$, invertierbar. □

Definition 4.1.8. Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und sei $f : D \to V$ eine Abbildung, wobei V ein Banach-Raum ist. Wir sagen, f ist **holomorph**, wenn für jedes $z \in D$ der Grenzwert

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(f(z+h) - f(z)\Big)$$

in V existiert. Ist f holomorph und ist $\alpha : V \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional, dann ist die Funktion $z \mapsto \alpha(f(z))$ eine holomorphe Funktion von D nach $\mathbb{C}$.

Lemma 4.1.9. *Sei H ein Hilbert-Raum und sei $T \in \mathcal{B}(H)$. Dann ist die Abbildung $f : \lambda \mapsto (T-\lambda)^{-1}$ holomorph ausserhalb des Spektrums $\sigma(T)$.*

Beweis. Nach dem Satz ist f stetig. Sei $\lambda \notin \sigma(T)$ und sei h eine kleine komplexe Zahl. Dann ist

$\frac{1}{h}\Big(f(\lambda+h)-f(\lambda)\Big)$ gleich

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}\Big((T-\lambda-h)^{-1}-(T-\lambda)^{-1}\Big)\\&=\frac{1}{h}(\lambda+h-T)^{-1}\Big((T-\lambda)-(T-\lambda-h)\Big)(\lambda-T)^{-1}\\&=-(T-\lambda-h)^{-1}(T-\lambda)^{-1}.\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist stetig in $h=0$. □

Definition 4.1.10. Sei H ein Hilbert-Raum. Für $T\in\mathcal{B}(H)$ sei der **Spektralradius** $r(T)$ definiert als

$$r(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|.$$

Satz 4.1.11 (Spektralradiusformel)**.** *Sei H ein Hilbert-Raum und $T\in\mathcal{B}(H)$.*

(a) *Das Spektrum $\sigma(T)$ ist nicht-leer.*

(b) *Es gilt $r(T)\le\|T\|$ und*
$$r(T)=\lim_n\|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

(c) *Ist T normal, so gilt*
$$r(T)=\|T\|.$$

Beweis. (a) Angenommen, $\sigma(T)=\emptyset$. Dann ist $T-\lambda$ stets invertierbar, also die Abbildung $\lambda\mapsto(T-\lambda)^{-1}$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Für $|\lambda|>2\|T\|$ ist $\left\|\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^n\right\|\le\frac{\|T\|^n}{|\lambda|^n}\le\frac{1}{2^n}$ und daher konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^n=\left(1-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}.$$

Es ist dann
$$\left\|(T-\lambda)^{-1}\right\|=\frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(1-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}\right\|\le\frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}=\frac{2}{|\lambda|}.$$

Also folgt für $v,w\in H$ und $|\lambda|>2\|T\|$,

$$\left|\left\langle(T-\lambda)^{-1}v,w\right\rangle\right|\le\frac{2\|v\|\,\|w\|}{|\lambda|}.$$

Die holomorphe Abbildung $\lambda\mapsto\left\langle(T-\lambda)^{-1}v,w\right\rangle$ ist auf $\{|\lambda|\le\|T\|\}$ beschränkt, nach obigem also insgesamt beschränkt, damit konstant, aber nach der obigen Abschätzung kann diese Konstante nur die Null sein. Wir erhalten also
$$(T-\lambda)^{-1}=0,$$

ein Widerspruch! Damit ist die Annahme falsch, also folgt $\sigma(T)\neq\emptyset$.

(b) $r(T) \le \|T\|$ folgt aus Satz 4.1.7. Wir beweisen die Ungleichungen

$$r(T) \le \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le \limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(T),$$

aus denen der Satz folgt.

Für $\lambda \in \sigma(T)$, gilt

$$\lambda^n - T^n = (\lambda - T)\sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j T^{n-1-j}.$$

Also $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ und damit $|\lambda|^n \le \|T^n\|$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Also $r(T) \le \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, so dass die erste Ungleichung folgt.

Um $\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(T)$ zu zeigen, betrachte

$$(\lambda - T)^{-1} = \lambda^{-1}\left(1 - \frac{T}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$$

für $|\lambda| > \|T\|$. Da diese Funktion holomorph ist, konvergiert die Reihe schwach für jedes $|\lambda| > r(T)$. Für gegebenes $|\lambda| > r(T)$ folgt, dass die Folge $T^n \frac{1}{\lambda^{n+1}}$ schwach konvergent, nach Korollar 2.5.5 also normbeschränkt ist. Also existiert ein $C \ge 0$ so dass $\|T^n\| \le C|\lambda|^{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nimmt man auf beiden Seiten n-te Wurzeln und wendet lim sup an, erhält man $\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le |\lambda|$. Da dies für jedes $|\lambda| > r(T)$ gilt, folgt $\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \le r(T)$.

(c) Sei T normal, so gilt

$$\left\|T^2 v\right\|^2 = \left\langle T^2 v, T^2 v\right\rangle = \left\langle Tv, T^* T^2 v\right\rangle = \langle T^* Tv, T^* Tv\rangle = \|T^* Tv\|^2 .$$

Also folgt $\left\|T^2\right\| = \|T^* T\| = \|T\|^2$, siehe Satz 3.1.1 (b). Dies gilt ebenso für T^k anstelle von T, also folgt induktiv, dass $\left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}$ ist. Daher $r(T) = \lim_n \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\|$. □

Beispiele 4.1.12. (a) Der Nulloperator, $Tv = 0$ für alle v, hat Spektrum $\{0\}$.

(b) Ein Beispiel, dass der Spektralradius nicht mit der Operatornorm übereinstimmen muss, ist leicht gefunden. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ als Operator auf $\mathbb{C}^2$. Der einzige Eigenwert ist Null, also ist $r(A) = 0 < 1 = \|A\|_{\mathrm{op}}$.

Satz 4.1.13. (a) *Ist T ein unitärer Operator und ist $\lambda \in \sigma(T)$, dann ist $|\lambda| = 1$.*

(b) *Ist S ein selbstadjungierter stetiger Operator und ist $\lambda \in \sigma(S)$, dann ist λ eine reelle Zahl.*

Beweis. (a) Da $\|T\| = 1$, folgt $|\lambda| \le 1$. Gilt $|\lambda| < 1$, so ist $\|\lambda T^*\| < 1$ und also ist

$$T - \lambda = T(1 - \lambda T^*)$$

invertierbar, was bedeutet $\lambda \notin \sigma(T)$.

(b) Sei S selbstadjungiert

und sei $\lambda = \sigma + it$. Setze $S_\lambda = S - \lambda$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\|S_\lambda v\|^2 &= \|Sv - \sigma v - itv\|^2\\ &= \langle Sv - \sigma v - itv, Sv - \sigma v - itv\rangle\\ &= \langle Sv - \sigma v, Sv - \sigma v\rangle + \underbrace{i\,\langle Sv - \sigma v, tv\rangle - i\,\langle tv, Sv - \sigma v\rangle}_{=0} + \langle tv, tv\rangle\\ &= \|Sv - \sigma v\|^2 + t^2\,\|v\|^2\,.\end{aligned}$$

Damit ist $\|S_\lambda v\| \geq |t|\,\|v\|$. Ist $t \neq 0$, so ist S_λ invertierbar nach Satz 3.2.3 (c), also $\lambda \notin \sigma(S)$. □

Definition 4.1.14. Ein selbstadjungierter Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ heisst **positiver Operator**, falls

$$\langle Tv, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Proposition 4.1.15. *Ist T ein positiver Operator, dann liegt das Spektrum $\sigma(T)$ im Intervall* $[0,\infty)$.

Wir werden später sehen, dass auch die Umkehrung richtig ist, d.h.: ist das Spektrum eines selbstadjungierten Operators T in $[0,\infty)$, dann ist T positiv.

Beweis. [Beweis der Proposition] Wir können annehmen, dass $\|T\| = 1$. Dann $\sigma(T) \subseteq [-1,1]$ da T selbstadjungiert ist. Wir zeigen dass $T_\mu := T + \mu 1$ invertierbar ist für jedes $\mu > 0$. Nach Annahme haben wir

$$\|T_\mu v\|\|v\| \geq \left\langle T_\mu v, v\right\rangle = \langle Tv, v\rangle + \mu\,\langle v, v\rangle \geq \mu\|v\|^2,$$

also $\|T_\mu v\| \geq \mu\|v\|$ für jedes $v \in H$. Daher ist T_μ invertierbar nach Satz 3.2.3. □

* * *

* * *

4.2 Funktionalkalkül fuer selbstadjungierte Operatoren

Erinnerung: eine **Algebra** über $\mathbb{C}$ ist ein komplexer Vektorraum $\mathcal{A}$ mit einem bilinearen und assoziativen Produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, geschrieben $(a,b) \mapsto ab$. Das heisst also, es gilt

$$\begin{aligned} a(b+c) &= ab + ac \qquad & (b+c)a &= ba + ca\\ \lambda(ab) &= (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad & (ab)c &= a(bc)\end{aligned}$$

für alle $a,b,c \in \mathcal{A}$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$.

Beispiele 4.2.1. (a) Man kann jeden Vektorraum V zu einer Algebra machen, indem man $ab = 0$ setzt. Dies ist allerdings nicht das interessanteste Beispiel.

(b) $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit der Matrixmultiplikation.

(c) $\mathcal{B}(H)$ für einen Hilbert-Raum H, das Produkt ist hier die Hintereinanderausführung.

(d) $C_0(X)$ für einen lokalkompakten Hausdorff-Raum.

Definition 4.2.2. Eine Algebra $\mathcal{A}$ heisst **unital**, wenn es ein **Einselement** gibt, das ist ein Element $1 = 1_{\mathcal{A}}$ so dass für jedes $a \in \mathcal{A}$ gilt

$$1a = a1 = a.$$

Wenn es ein solches gibt, ist es eindeutig bestimmt, denn sei $1'$ ein zweites, dann gilt $1 = 11' = 1'$.

Definition 4.2.3. Eine lineare Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei Algebren heisst **Algebrenhomomorphismus**, falls $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{A}$ gilt. Ist $\mathcal{A}$ unital, so verlangt man ausserdem, dass $\mathcal{B}$ auch unital ist und dass $\phi(1) = 1$ ist.

Ein Algebrenhomomorphismus ϕ heiss **Isomorphismus**, wenn ϕ bijektiv ist. Dann ist die Umkehrabbildung ebenfalls ein Algebrenhomomorphismus.

Beispiel 4.2.4. Ist $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge des lokalkompakten Hausdorffraums Raums X, dann ist die Restriktion $C_0(X) \to C_0(Y)$; $f \mapsto f|_Y$ ein Algebrenhomomorhismus.

Sei $\mathbb{C}[x]$ die Algebra der Polynome in der Variablen x. Für $T \in \mathcal{B}(H)$ betrachte den Algebrenhomomorphismus $P : \mathbb{C}[x] \to \mathcal{B}(H)$ gegeben durch

$$P(f) = f(T).$$

Ist also $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$, dann ist $P(f) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$.

Lemma 4.2.5 (Spektraler Abbildungssatz für Polynome)**.** *Sei T ein stetiger normaler Operator auf einem Hilbert-Raum H. Für ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ ist $f(T)$ ein stetiger Operator mit*

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$$

wobei $f(\sigma(T)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Beweis. Sei der Grad von f grösser Null. Wir schreiben

$$f(X) - \lambda = a(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n).$$

Dann ist

$$f(T) - \lambda = a(T - \lambda_1) \cdots (T - \lambda_n).$$

"$\subset$" Sei $\lambda \in \sigma(f(T))$. Dann ist $f(T) - \lambda$ nicht invertierbar und daher muss ein λ_i im Spektrum von T liegen. Es ist dann $\lambda = f(\lambda_i) \in f(\sigma(T))$.

"$\supset$" Sei $\lambda \in f(\sigma(T))$, also $\lambda = f(\mu)$ mit $\mu \in \sigma(T)$. Dann ist $\mu = \lambda_i$ für ein i. Daher ist $f(T) - \lambda$ nicht invertierbar, also $\lambda \in \sigma(f(T))$. □

Satz 4.2.6 (Stetiger Funktionalkalkül). *Sei T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbert-Raum H. Es gibt genau einen isometrischen Algebrenhomomorphismus $\phi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(H)$ mit $\phi(\mathrm{Id}) = T$. Hierbei bezeichnet* Id *die Abbildung $\sigma(T) \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z$. Dieser Homomorphismus hat die zusätzliche Eigenschaft*

$$\phi(f^*) = \phi(f)^*,$$

wobei wir für $f \in C(\sigma(T))$ definieren: $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Wir schreiben $\phi(f)$ suggestiv als $f(T)$. Es gilt

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

Insbesondere ist $f(T)$ selbstadjungiert, falls f reellwertig ist.

Beweis. Jedes Polynom $p(x)$ liefert eine stetige Abbildung $\sigma(T) \to \mathbb{C}$. Wir erhalten also einen Algebrenhomomorphismus $\psi : \mathbb{C}[x] \to C(\sigma(T))$. Andererseits haben wir einen Algebrenhomomorphismus $P : \mathbb{C}[x] \to \mathcal{B}(H)$ gegeben durch $P(f) = f(T)$. Wir wollen den gepunkteten Homomorphismus konstruieren:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[x] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "P"'] & C(\sigma(T)) \arrow[d, dotted, "\exists!"] \\ & \mathcal{B}(H) \end{tikzcd}$$

1. Schritt: Das Bild von ψ ist dicht in $C(\sigma(T))$:
Das Bild A ist eine Unteralgebra von $C(\sigma(T))$. Es gilt

(a) A trennt Punkte, da z.B. die Funktion $x \mapsto x$ in A liegt.

(b) Für jedes $x \in X$ gibt es ein $f \in A$ so dass $f(x) \neq 0$, da z.B. die Konstanten in A liegen.

(c) Ist $f \in A$, dann liegt auch die komplex konjugierte Funktion $\overline{f}$ in A. Fuer ein Polynom $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ sei das Polynom f^* definiert durch

$$f^*(x) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\, x + \cdots + \overline{a_n}\, x^n,$$

also $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Fuer eine reelle Zahl λ gilt $\overline{f(\lambda)} = f^*(\lambda)$ und da das Spektrum in $\mathbb{R}$ liegt, folgt $\overline{f} \in A$.

Nach dem Satz von Stone-Weierstraß folgt dann, dass A dicht liegt.

2. Schritt: Für jedes $f \in \mathbb{C}[x]$ gilt

$$\left\|\psi(f)\right\|_{\sigma(T)} = \left\|P(f)\right\|_{\mathrm{op}}.$$

Da T normal, ist $f(T)$ normal, also ist $r\big(f(T)\big) = \big\|f(T)\big\|$ nach Satz 4.1.11. Daher

$$\begin{aligned}\big\|\psi(f)\big\|_{\sigma(T)} &= \sup_{z\in\sigma(T)} |f(z,\overline{z})| = \sup_{z\in f(\sigma(T))} |z| = \sup_{z\in\sigma(f(T))} |z| \\ &= r(f(T)) = \big\|f(T)\big\| = \big\|P(f)\big\|.\end{aligned}$$

3. Schritt: Finale.
Aus dem 2. Schritt folgt, dass der Kern J von ψ gleich dem Kern von P ist, das Bild Bild(ψ) ist also isomorph $\mathbb{C}[X]/J$ und dies ist isomorph zum Bild Bild(P). Ferner ist die Abbildung

$$\mathrm{Bild}(\psi) \to \mathrm{Bild}(P) \to \mathcal{B}(H)$$

isometrisch, setzt also zu genau einer isometrischen Abbildung $\phi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(H)$ fort. Auf der dichten Unteralgebra Bild(ψ) ist ψ ein Algebrenhomomorphismus, also ist ϕ insgesamt ein Algebrenhomomorphismus. Die Eindeutigkeit ist klar wegen der Dichtheit der Polynome.

Die Eigenschaften $\phi(f^*) = \phi(f)^*$ und $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ klar, wenn f ein Polynom ist, siehe Lemma 4.2.5. Die erste folgt durch Approximation fuer alle f.

Sei f_j eine Folge von Polynomen die in $C(\sigma(T))$ gegen f konvergiert. Es gilt $f_j(\sigma(T)) = \sigma(f_j(T))$ nach Lemma 4.2.5. Dann besteht $f(\sigma(T))$ genau aus den Limiten der Folgen $f_j(z)$, $z \in \sigma(T)$. Da $\sigma(T)$ kompakt ist, besteht $f(\sigma(T))$ auch aus den Limiten aller konvergenten Folgen der Form $f_j(z_j)$ mit $z_j \in \sigma(T)$. Daher gilt wegen der Offenheit von $\mathcal{B}(H)^\times$,

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus \sigma(f(T)) &\Leftrightarrow f(T) - \lambda \ \in \mathcal{B}(H)^\times \\ &\Leftrightarrow \exists_{j_0\in\mathbb{N},\delta>0}\forall_{j\geq j_0}\forall_{z\in B_\delta(\lambda)} \ \big(f_j(T) - z\big) \in \mathcal{B}(H)^\times \\ &\Leftrightarrow \exists_{j_0\in\mathbb{N},\delta>0}\forall_{j\geq j_0}\forall_{z\in B_\delta(\lambda)} \ \ z \in \mathbb{C} \smallsetminus \sigma(f_j(T)) \\ &\Leftrightarrow \exists_{j_0\in\mathbb{N},\delta>0}\forall_{j\geq j_0}\forall_{z\in B_\delta(\lambda)} \ \ z \in \mathbb{C} \smallsetminus f_j(\sigma(T)) \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{C} \smallsetminus f(\sigma(T)).\end{aligned}$$

Damit also $\sigma(f(T)) = f(\sigma * T))$. □

Proposition 4.2.7. *Ein selbstadjungierter Operator ist genau dann positiv, wenn sein Spektrum positiv ist.*

Beweis. Ist $T \geq 0$, so ist nach Proposition 4.1.15 $\sigma(T) \geq 0$.

Sei umgekehrt $\sigma(T) \geq 0$. Dann existiert nach dem Funktionalkalkül ein selbstadjungierter Operator $S = \sqrt{T}$ so dass $T = S^2$. Es folgt für $v \in H$,

$$\langle Tv, v\rangle = \left\langle S^2 v, v\right\rangle = \langle Sv, Sv\rangle \geq 0.$$ □

Korollar 4.2.8. *Sei T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbert-Raum H. Es gelte $\sigma(T) = A \cup B$ mit zwei disjunkten abgeschlossenen Teilmengen A, B. Dann existieren eindeutig bestimmte selbstadjungierte Operatoren T_A, T_B so dass*

- $T = T_A + T_B$,
- $\sigma(T_A) = A, \quad \sigma(T_B) = B$,
- *die drei Operatoren T, T_A, T_B kommutieren miteinander.*

Ferner gibt eine Orthogonalzerlegung $H = H_A \oplus H_B$, so dass gilt

$$T_A = P_A T = T P_A, \quad T_B = P_B T = T P_B,$$

wobei P_A und P_B die entsprechenden Orthogonalprojektionen sind. Man kann diesen letzten Tatbestand etwas lax so ausdrücken, dass in der Zerlegung $H = H_A \oplus H_B$ gilt

$$T = \begin{pmatrix} T_A & 0 \\ 0 & T_B \end{pmatrix}.$$

Beweis. Da $A \cap B = \emptyset$ und beide abgeschlossen sind, liegen die Funktionen $\mathbf{1}_A$ und $\mathbf{1}_B$ in $C\big(\sigma(T)\big)$. Setze $f_A(t) = t\mathbf{1}_A$ und $f_B(t) = t\mathbf{1}_B$ und $T_A = f_A(T)$ sowie $T_B = f_B(T)$. Wegen $f_A + f_B = \mathrm{Id}_{\sigma(T)}$ folgt $T = T_A + T_B$, ferner ist $\sigma(T_A) = f_A(\sigma(T)) = A$ und ebenso für B. Da alle Operatoren eines Funktionalkalküls miteinander kommutieren sind die ersten drei Punkte bewiesen.

Für den Rest setze $P_A = \mathbf{1}_A(T)$, dann ist P_A eine selbstadjungierte Projektion, also eine Orthogonalprojektion, sei H_A das Bild. Wir machen dasselbe für B und stellen fest. dass $P_A P_B = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B(T) = 0$ ist, sowie $P_A + P_B = \mathbf{1}(T) = \mathrm{Id}_H$. □

Proposition 4.2.9. *Sei $T = T^* \in \mathcal{B}(H)$ und $f \in C(\sigma(T))$ reellwertig. Sei $S = f(T)$, dann ist S selbstadjungiert. Sei $g \in C(\sigma(S))$, dann gilt*

$$(g \circ f)(T) = g(f(T)).$$

Beweis. Ist $g(x) = x^n$, dann ist $g \circ f(x) = f(x)^n$ und da $h \mapsto h(T)$ ein Algebrenhomomorphismus ist, folgt $g \circ f(T) = f(T)^n = g(f(T))$. Wegen Linearität beider Seiten folgt die Behauptung für den Fall, dass g ein Polynom ist. Ist allgemein $g_j \to g$ eine Folge von Polynomen, die g auf $\sigma(S)$ approximiert, dann geht $g_j \circ f$ gleichmässig auf $\sigma(T)$ gegen $g \circ f$, es folgt also

$$g \circ f(T) = \lim_j g_j \circ f(T) = \lim_j g_j(f(T)) = g(f(T)).$$ □

Beispiel 4.2.10. Sei $H = L^2(I)$, wobei $I = [0, 1]$ das Einheitsintervall ist. Fuer eine stetige Funktion $\phi : I \to \mathbb{C}$ sei der Operator T_ϕ definiert durch

$$T_\phi(\eta)(x) = \phi(x)\, \eta(x).$$

Wir wissen, dass $\sigma(T_\phi) = \phi(I)$ gilt. Wir behaupten nun

(a) Konvergiert die Folge ϕ_j gleichmaessig auf I gegen ϕ, dann konvergiert T_{ϕ_j} in der Operator-Norm gegen T_ϕ.

(b) Fuer jedes $f \in C(\sigma(T_\phi))$ gilt $f(T_\phi) = T_{f\circ\phi}$.

Beweis. (a) Sei $\|\cdot\|_I$ die Supremumsnorm auf I. Wir haben dann $\left\|\phi_j - \phi\right\|_I \to 0$. Fuer $\eta \in L^2(I)$ gilt

$$\begin{aligned}\left\|T_{\phi_j}(\eta) - T_\phi(\eta)\right\|^2 &= \int_I \left|T_{\phi_j}(\eta)(x) - T_\phi(\eta)(x)\right|^2 \, dx \\ &= \int_I \left|\phi_j(x)\,\eta(x) - \phi(x)\,\eta(x)\right|^2 \, dx \\ &= \int_I \left|\phi_j(x) - \phi(x)\right|^2 \, |\eta(x)|^2 \, dx \\ &\le \left\|\phi_j - \phi\right\|_I^2 \, \left\|\eta\right\|^2.\end{aligned}$$

Nimmt man das Supremum ueber alle η mit $\left\|\eta\right\| = 1$, so folgt

$$\left\|T_{\phi_j} - T_\phi\right\|_{\mathrm{op}} \le \left\|\phi_j - \phi\right\|_I \to 0.$$

(b) Ist $f(x) = x^n$, dann gilt

$$f(T_\phi)(\eta)(x) = T_\phi^n(\eta)(x) = \phi(x)^n\,\eta(x) = T_{\phi^n}(\eta(x) = T_{f\circ\phi}(\eta)(x).$$

Also gilt die Behauptung fuer diesen Fall. Gilt die Behauptung fuer f, g, dann auch fuer jede Linearkombination, denn ist $h = \lambda f + \mu g$, dann gilt

$$\begin{aligned}h(T_\phi) &= \lambda f(T_\phi) \;+\; \mu g(T_\phi) \\ &= \lambda T_{f\circ\phi} + \mu T_{g\circ\phi} = T_{\lambda f\circ\phi+\mu g\circ\phi} \\ &= T_{(\lambda f+\mu g)\circ\phi} = T_{h\circ\phi}.\end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung fuer Polynome. Ist schliesslich $f \in C(\sigma(T_\phi))$ beliebig und f_j eine Folge von Polynomen, die gleichmaessig auf $\sigma(T)$ gegen f konvergiert, dann konvergiert $f_j \circ \phi$ auf I gleichmaessig gegen $f \circ \phi$ und damit folgt nach Teil (a),

$$\begin{aligned}f(T_\phi) &= \lim_j f_j(T_\phi) && \text{da } f \mapsto f(T) \text{stetig ist} \\ &= \lim_j T_{f_j\circ\phi} \\ &= T_{f\circ\phi}.\end{aligned}$$

□

* * *

4.3 Polarzerlegung

Sei T ein stetiger Operator auf H. Dann ist T^*T selbstadjungiert und positiv. Deshalb ist das Spektrum $\sigma(T^*T)$ eine Teilmenge von $[0, \infty)$, siehe Proposition 4.1.15. Deshalb ist die Wurzelfunktion $x \mapsto \sqrt{x}$ eine stetige Funktion auf $\sigma(T^*T)$. Mit Hilfe des Funktionalkalküls definieren wir $|T| = \sqrt{T^*T} \in \mathcal{B}(H)$. Dies ist ein selbstadjungierter Operator mit positivem Spektrum und der Eigenschaft $|T|^2 = T^*T$.

Satz 4.3.1. *Sei T ein stetiger Operator auf dem Hilbert-Raum H. Für $v \in H$ ist die Norm von $|T|v$ gleich $\|Tv\|$. Es existiert ein isometrischer Isomorphismus U vom Abschluss von* Bild$(|T|)$ *zum Abschluss von* Bild(T) *so dass*

$$T = U\,|T|.$$

Diese Zerlegung von T heisst **Polarzerlegung**. *Sie ist eindeutig in folgendem Sinne. Ist $T = U'P$, wobei P selbst-adjungiert und positiv ist und $U' : \overline{\mathrm{Bild}(P)} \to H$ ist isometrisch, dann folgt $U' = U$ und $P = |T|$.*

Beweis. Für $v \in H$ ist das Quadrat der Norm $\|Tv\|^2$ gleich

$$\langle Tv, Tv\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle = \left\langle |T|^2 v, v\right\rangle = \langle |T|v, |T|v\rangle = \||T|v\|^2$$

Für $v \in H$ definieren wir $U(|T|v) = Tv$, dann ist U eine wohldefinierte Isometrie von Bild$(|T|)$ nach Bild(T), die auf den Abschluss ausdehnt und die Behauptung erfüllt. Ferner ist U surjektiv, da es nach Definition schon surjektiv von Bild$(|T|) \to$ Bild(T) ist und da es eine Isometrie ist, ist das Bild $U(\overline{\mathrm{Bild}(|T|)}) \subset \overline{\mathrm{Bild}(T)}$ vollständig und enthält Bild(T), also ist U surjektiv.

Für die Eindeutigkeit sei $T = U|T| = U'P$. Erweitere U zu einem beschränkten Operator auf H durch $U \equiv 0$ auf Bild$(|T|)^\perp$ mach dasselbe für U'. Dann ist U^*U die Orthogonalprojektion auf $\overline{\mathrm{Bild}(|T|)}$ und $(U')^*U'$ ist die Orthogonalprojektion auf Bild(P), so dass $(U')^*U'P = P$. Es gilt

$$|T| = \sqrt{T^*T} = \sqrt{(U'P)^*U'P} = \sqrt{P^*(U')^*U'P} = \sqrt{P^*P} = \sqrt{P^2} = P.$$

Hieraus folgt auch $U = U'$. □

Beispiele 4.3.2. (a) Sei $H = \mathbb{C}^2$ und T durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann ist $A^*A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar\lambda & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |\lambda|^2 \end{pmatrix}$. Also ist $|T|$ gegeben durch $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & |\lambda| \end{pmatrix}$ und U durch $\begin{pmatrix} 0 & \lambda/|\lambda| \\ \lambda/|\lambda| & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sei $H = L^2([0,1])$ und $f : [0,1] \to \mathbb{C}^\times$ eine stetige Funktion. Betrachte den Operator $T_f : H \to H$ gegeben durch

$$T_f\phi(x) = f(x)\phi(x).$$

Wir schreiben die Funktion f als $f = u|f|$, wobei $u : [0,1] \to \mathbb{T}$ stetig ist, genauer ist $u(x) = f(x)/|f(x)|$. Es gilt dann $T_f = T_{|f|}T_u$ und dies ist genau die Polarzerlegung.

4.4 Spektralmaße

Definition 4.4.1. Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\mathfrak{A}$ die Borel-σ-Algebra auf X und sei H ein Hilbert-Raum. Ein **Spektralmaß** ist ein Abbildung $\mu : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(X) = \mathrm{Id}$.

(b) Jedes $\mu(A)$ ist eine Orthogonalprojektion.

(c) $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

(d) Für alle $v, w \in H$ ist die Funktion

$$\mu_{v,w}(A) = \langle \mu(A)v, w \rangle$$

ein $\mathbb{C}$-wertiges Radon-Maß definiert auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$.

Erste Eigenschaften

– Sind $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkte messbare Mengen, dann gilt

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j),$$

wobei die Summe in der schwachen Operatortopologie konvergiert.

– Für jedes $v \in H$ gilt

$$\mu_{v,v}(A) = \langle \mu(A)v, v \rangle = \langle \mu(A)v, \mu(A)v \rangle = \left\|\mu(A)v\right\|^2,$$

so dass $\mu_{v,v}$ ein positives Radon-Maß ist mit

$$\mu_{v,v}(X) = \|v\|^2.$$

– $|\mu_{v,w}(A)| \le \left\|\mu(A)v\right\| \|w\| \le \|v\| \|w\|$. für eine messbare Funktion f auf X mit $|f(x)| \le C$ für jedes $x \in X$ gilt

$$\left|\int_X f(x)\, d\mu_{v,w}(x)\right| \le C \|v\| \|w\|.$$

Beweis. Die erste Aussage ist klar nach Definition. Für die zweite reicht es, anzunehmen, dass $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{A_j}$ mit paarweise disjunkten messbaren Mengen $A_j \subset X$ und $c_j \in \mathbb{C}$. Indem wir eine weitere Menge A_j mit $c_j = 0$ hinzufügen, können wir $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ annehmen. Dann ist $\left|\left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle\right| = \theta_j \left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle$ für ein $\theta_j \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sei $Uv = \sum_{j=1}^n \theta_j \mu(A_j)v$, dann ist U ein unitärer Operator auf H. Es ist dann $|c_j| \le C$ und

$$\begin{aligned}
\left|\int_X f(x)\, d\mu_{v,w}(x)\right| &= \left|\sum_{j=1}^n c_j \mu_{v,w}(A_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^n c_j \left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle\right| \\
&\le \sum_{j=1}^n |c_j| \left|\left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle\right| \le C \sum_{j=1}^n \left|\left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle\right| \\
&= C \sum_{j=1}^n \theta_j \left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle = C \langle Uv, w \rangle \le C \|v\| \|w\|.
\end{aligned}$$

□

– Je zwei Projektionen $\mu(A)$ und $\mu(B)$ kommutieren miteinander.

– Ist $A \cap B = \emptyset$, so stehen die Bilder von $\mu(A)$ und $\mu(B)$ senkrecht aufeinander, d.h. es gilt $\mu(A)\mu(B) = 0$.

Beispiele 4.4.2. (a) Sei $T : H \to H$ ein normaler Operator auf dem endlich-dimensionalen Hilbert-Raum H. Auf der Borel-σ-Algebra von $\mathbb{C}$ definieren wir

$$\mu(A) = \sum_{\lambda \in A} Pr_\lambda,$$

wobei Pr_λ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ ist. Da verschiedene Eigenräume von T senkrecht aufeinander stehen, ist μ ein Spektralmaß.

(b) Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und für jede messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ sei $\mu(A) : H \to H$ gegeben durch

$$\mu(A)(\phi) = \mathbf{1}_A \phi.$$

Dann ist μ ein Spektralmaß.

Proposition 4.4.3. *Ist μ ein Spektralmaß, dann ist für jedes $v \in H$ die Abbildung*

$$A \mapsto \mu(A)v$$

ein abzählbar additives, H-wertiges Maß auf X. Mit anderen Worten, $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ist σ-additiv, wenn wir $\mathcal{B}(H)$ mit der starken Topologie versehen.

Man beachte, dass μ als Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(H)$ im Allgemeinen nicht σ-Additiv ist, wenn $\mathcal{B}(H)$ die Normtopologie trägt!

Beweis. Nur die σ-Additivität ist zu zeigen. Seien also $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkte messbare Mengen und $A = \bigcup_j A_j$. Nach Voraussetzung ist für jedes $w \in H$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle = \langle \mu(A)v, w \rangle .$$

Sei $v_j = \mu(A_j)v$. Da die A_j paarweise disjunkt sind, sind die v_j paarweise orthogonal. Da

$$\begin{aligned} \sum_j \left\| v_j \right\|^2 &= \sum_j \left\| \mu(A_j)v \right\|^2 = \sum_j \left\langle \mu(A_j)v, \mu(A_j)v \right\rangle \\ &= \sum_j \left\langle \mu(A_j)v, v \right\rangle = \sum_j \mu_{v,v}(A_j) = \mu_{v,v}(A) \le \mu_{v,v}(X) = \|v\|^2 < \infty \end{aligned}$$

konvergiert die Reihe $\sum_j v_j$ in der Norm gemäss Satz 2.6.12. □

Beispiel 4.4.4. Ein Beispiel, dass ein Spektralmaß als Abbildung nach $\mathcal{B}(H)$ nicht σ-additiv ist: Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $\mu(A)(\phi) = \mathbf{1}_A \phi$. Sei $A_j = (j, j+1)$ für $j \in \mathbb{N}$ und sei $A = \bigcup_j A_j$. Dann konvergiert die Summe $\sum_j \mu(A_j)$ stark gegen $\mu(A)$ wie wir in der Proposition gezeigt haben. Sie konvergiert allerdings nicht in der Norm, denn

$$\mu(A) - \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j>N} A_j \right)$$

ist eine Projektion $\neq 0$, hat also stets Norm 1.

Lemma 4.4.5. *Sei μ ein Spektralmaß und seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_j) = 0$ für jedes j. Sei $A = \bigcup_j A_j$. Dann ist $\mu(A) = 0$.*

Beweis. Für $v \in H$ gilt $\mu_{v,v}(A_j) = 0$ und daher $0 = \mu_{v,v}(A) = \langle \mu(A)v, v \rangle$. Daher ist die Projektion $\mu(A)$ gleich Null. □

Lemma 4.4.6. *Sei μ ein Spektralmaß auf X mit Werten in $\mathcal{B}(H)$. Sei $f \in C(X)$. Es gibt dann genau einen stetigen linearen Operator T mit der Eigenschaft*

$$\langle Tv, w \rangle = \int_X f(x)\, d\mu_{v,w}(x)$$

für $v, w \in H$. Wir schreiben diese Operator als

$$T = \int_X f(x)\, d\mu(x).$$

Beweis. Für $v, w \in H$ gilt

$$\left|\int_X f(x)\, d\mu_{v,w}(x)\right| \le \left\|f\right\|_X \|v\| \, \|w\|,$$

daher ist die lineare Abbildung $w \mapsto \overline{\int_X f(x)\, d\mu_{v,w}(x)}$ stetig und es gibt einen eindeutig bestimmten Vektor Tv mit

$$\langle Tv, w\rangle = \int_X f(x)\, d\mu_{v,w}(x).$$

Die so entstehende Abbildung $v \mapsto Tv$ ist linear und nach obiger Abschätzung ist sie auch beschränkt. □

Lemma 4.4.7. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen kompakten Hausdorff-Raeumen und sei μ ein Sprektralmaß auf X. Dann ist $f_*\mu$, definiert durch*

$$f_*\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$$

ein Spektralmaß auf Y.

Beweis. Klar. □

* * *

4.5 Der Spektralsatz für normale Operatoren

Satz 4.5.1 (Spektralsatz)**.** *Sein T ein normaler stetiger Operator auf dem Hilbert-Raum H. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß $\mu = \mu_T$ auf der Borel-σ-Algebra von $\sigma(T)$ so dass*

$$T = \int_{\sigma(T)} t\, d\mu(t)$$

Jede Projektion $\mu(A)$ kommutiert mit jedem $S \in \mathcal{B}(H)$, welches mit T kommutiert. Der Traeger von μ ist $\sigma(T)$.

Satz 4.5.2 (Funktionalkalkül fuer normale Operatoren)**.** *Sei T ein normaler stetiger Operator auf einem Hilbert-Raum H und sei μ sein Spektralmaß. Die Abbildung $f \mapsto f(T)$, wobei*

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu(t)$$

definiert einen isometrischen Algebrenhomomorphismus $\phi : C(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(H)$ mit $\phi(\mathrm{Id}) = T$. Hierbei bezeichnet Id *die Abbildung $\sigma(T) \to \mathbb{C}$ gegeben durch $z \mapsto z$. Dieser Homomorphismus hat die zusätzliche Eigenschaft*

$$\phi(f^*) = \phi(f)^*,$$

wobei wir für $f \in C(\sigma(T))$ definieren: $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Wir schreiben $\phi(f)$ suggestiv als $f(T)$. Es gilt

$$\sigma(f(T)) = f(\sigma(T)).$$

Insbesondere ist $f(T)$ selbstadjungiert, falls f reellwertig ist.

Beweis. Wir beweisen beide Saetze zusammen.

Zur Eindeutigkeit des Spektralmaßes: Es sei ein Spektralmaß μ fuer T gegeben. Fuer $f \in C(X)$ sei $f(T) = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu(t)$ gemaess Lemma 4.4.6 definiert. Sind $f, g \in C(\sigma(T))$, so wollen wir zeigen, dass

$$f(T)g(T) = \int_{\sigma(T)} f(t)g(t)\, d\mu(t)$$

gilt. Seien hierfür zunächst $A, B \subset \sigma(T)$ messbar und $f = \mathbf{1}_A$, $g = \mathbf{1}_B$, dann ist

$$f(T)g(T) = \mu(A)\mu(B) = \mu(A \cap B) = \int_{\sigma(T)} f(t)g(t)\, d\mu(t).$$

Beliebige f und g approximiert man nun durch Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen und erhält die Behauptung. Damit ist insbesondere $f \mapsto f(T)$ ein Algebrenhomomorphismus wie im Satz.

Sei $p \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein Polynom in zwei Variablen und $f(z) = p(z, \bar{z})$. Setze dann $f(T) = p(T, T^*)$, so folgt insbesondere

$$p(T, T^*) = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu(t),$$

wobei auf der rechten Seite das Einsetzen ins Polynom gemeint ist. Insbesondere setzt diese Vorschrift das stetige Funktionalkalkuel auf normale Operatoren fort.

Die Aussage bedeutet

$$\langle f(T)v, w\rangle = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu_{v,w}(t)$$

für alle $v, w \in H$ und alle $f \in C(\sigma(T))$ von dieser Gestalt. Da diese Integrale ein Spektralmaß eindeutig festlegen, folgt die Eindeutigkeit.

Zur Existenz: Wir nehmen zunächst an, dass T **selbstadjungiert** ist. Die Abbildung $f \mapsto \langle f(T)v, v\rangle$ ist ein positives lineares Funktional, definiert nach dem Darstellungssatz von Riesz also ein Radon-Maß $\mu_{v,v}$ auf $\sigma(T)$. Dieses Maß nimmt wegen $\mu_{v,v}(\sigma(T)) = \|v\|^2 < \infty$ nur endliche Werte an. Aus den

Polarisierungsidentitäten erhält man dann komplexwertige Maße $\mu_{v,w}$, durch

$$\mu_{v,w} = \frac{1}{4}\left[\mu_{v+w} - \mu_{v-w} + i\mu_{v+iw} - i\mu_{v-iw}\right],$$

wobei wir abkürzend μ_v für $\mu_{v,v}$ geschrieben haben. Für die Totalvariation $|\mu_{v,w}|$ gilt

$$|\mu_{v,w}| \le \frac{1}{4}\left[\mu_{v+w} + \mu_{v-w} + \mu_{v+iw} + \mu_{v-iw}\right].$$

Auf Grund der Polarisierungsidentitäten folgt $\langle f(T)v, w\rangle = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu_{v,w}(t)$ für alle $v, w \in H$ und jedes $f \in C(\sigma(T))$. Ist f reellwertig, so gilt $\langle f(T)v, w\rangle = \overline{\langle f(T)w, v\rangle}$ und daher folgt $\mu_{w,v} = \overline{\mu_{v,w}}$.

Ist f nur messbar und beschränkt, etwa $|f| \le C$ macht die rechte Seite der Gleichung immer noch Sinn. Wir behaupten, dass die lineare Abbildung $w \mapsto \overline{\int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu_{v,w}(t)}$ stetig ist. Hierzu seien $\|w\| = \|v\| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu_{v,w}(t)\right| &\le \int_{\sigma(T)} |f(t)|\, d|\mu_{v,w}|(t)\\
&\le \frac{1}{4}\int_{\sigma(T)} |f(t)|\, d\left[\mu_{v+w} + \mu_{v-w} + \mu_{v+iw} + \mu_{v-iw}\right]\\
&\le \frac{1}{4}\int_{\sigma(T)} C\, d\left[\mu_{v+w} + \mu_{v-w} + \mu_{v+iw} + \mu_{v-iw}\right]\\
&= \frac{C}{4}\Big(\langle v+w, v+w\rangle + \langle v-w, v-w\rangle +\\
&\qquad + \langle v+iw, v+iw\rangle + \langle v-iw, v-iw\rangle\Big)\\
&= C(\|v\|^2 + \|w\|^2) = 2C.
\end{aligned}$$

Also ist diese lineare Abbildung stetig. Daher existiert genau ein Vektor $\phi(f)v$ so dass

$$\Big\langle \phi(f)v, w\Big\rangle = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu_{v,w}(t)$$

für alle w gilt. Nach der obigen Rechnung ist für $\|v\| = \|w\| = 1$ schon $|\Big\langle \phi(f)v, w\Big\rangle| \le 2C$, also gilt für beliebige v, w:

$$|\Big\langle \phi(f)v, w\Big\rangle| \le 2C\, \|v\|\, \|w\|.$$

Die Abbildung $v \mapsto \phi(f)v$ ist schnell als linear erkannt. Sie ist auch stetig, denn für $w = \phi(f)v$ erhalten wir

$$\Big\|\phi(f)v\Big\|^2 = |\Big\langle \phi(f)v, \phi(f)v\Big\rangle| \le 2C\, \|v\|\, \Big\|\phi(f)v\Big\|,$$

also $\Big\|\phi(f)v\Big\| \le 2C\, \|v\|$.

Wir behaupten nun, dass $\phi(fg) = \phi(f)\phi(g)$ für alle beschränkten messbaren Funktionen f, g auf $\sigma(T)$ gilt. Hierzu beachte, dass diese Gleichung für $f, g \in C(\sigma(T))$ richtig ist, also

$$\int_{\sigma(T)} f(t)g(t)\, d\mu_{v,w}(t) = \Big\langle \phi(fg)v, w\Big\rangle = \Big\langle \phi(f)\phi(g)v, w\Big\rangle = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu_{g(T)v,w}.$$

Die Gleichheit dieser Integrale bleibt erhalten, wenn f durch eine beschränkte messbare Funktion ersetzt wird. In diesem Fall schreiben wir dann

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma(T)} f(t)g(t)\, d\mu_{v,w}(t) &= \Big\langle \phi(fg)v, w\Big\rangle = \Big\langle \phi(g)v, \phi(f)^*w\Big\rangle\\
&= \int_{\sigma(T)} g(t)\, d\mu_{v,\phi(f)^*w}.
\end{aligned}$$

Jetzt können wir auch g durch eine beschränkte messbare Funktion ersetzen, so dass wir erhalten

$$\begin{aligned}\left\langle \phi(fg)v, w\right\rangle &= \int_{\sigma(T)} fg\, d\mu_{v,w} = \int_{\sigma(T)} g\, d\mu_{v,\phi(f)^* w}\\ &= \left\langle \phi(g)v, \phi(f)^* w\right\rangle = \left\langle \phi(f)\phi(g)v, w\right\rangle.\end{aligned}$$

Die Gleichung $\phi(f)^* = \phi(f^*)$ vererbt sich ebenfalls von $C(\sigma(T))$ auf alle beschränkten messbaren Funktionen. Wir definieren nun $\mu(A) = \phi(\mathbf{1}_A)$ für eine messbare Teilmenge $A \subset \sigma(T)$. Dann ist $\mu(A)$ eine Orthogonalprojektion. Die Eigenschaften eines Spektralmaßes sind erfüllt.

Das beendet den Beweis des Spektralsatzes im Falle eines selbstadjungierten Operators.

Sei nun $T : H \to H$ ein normaler Operator auf dem Hilbert-Raum H. Dann gilt $T = R + iS$, wobei R und S selbstadjungiert sind und miteinander vertauschen. Sei $K_{R,S} \subset \mathbb{C}$ das Kompaktum $\sigma(R) + i\sigma(S)$, und seien μ_R und μ_S die Spektralmaße von R und S. Nach den bereits bewiesenen Aussagen des Satzes 4.5.1 kommutieren die Spektralmaße μ_R und μ_S miteinander, d.h., für je zwei messbare Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\mu_R(A)\mu_S(B) = \mu_S(B)\mu_R(A).$$

Insbesondere folgt, dass

$$\mu(A \times B) = \mu_R(A)\mu_S(B)$$

wieder eine Orthogonalprojektion ist. Da die Mengen der Form $A \times B$ die Borel-σ-Algebra von K erzeugen, definiert diese Vorschrift ein Spektralmaß auf $K_{R,S}$. Wir haben

$$\begin{aligned}\int_K z\, d\mu(z) &= \int_{\sigma(R)} \int_{\sigma(S)} (x + iy)\, d\mu_R(x)\, d\mu_S(y)\\ &= \int_{\sigma(R)} \int_{\sigma(S)} x\, d\mu_R(x)\, d\mu_S(y) + i \int_{\sigma(R)} \int_{\sigma(S)} y\, d\mu_R(x)\, d\mu_S(y)\\ &= \int_{\sigma(R)} x\, d\mu_R(x) + i \int_{\sigma(S)} y\, d\mu_S(y) = R + iS = T.\end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit des Spektralmasses ist wieder klar. Es bleibt zu zeigen, dass das auf K definierte Spektralmaß μ Träger $\sigma(T)$ hat. Dies folgt aus einem Lemma von unabhaengigem Wert.

Lemma 4.5.3. *Sei $A \subset \sigma(T)$ messbar und sei $H = B \oplus K$ die Orthogonalzerlegung von H in Bild und Kern der Projektion $\mu(A)$. Dann sind B und K stabil unter T und es gilt*

$$\sigma\left(T|_B\right) \subset \overline{A}, \qquad \sigma\left(T|_K\right) \subset \overline{\sigma(T) \smallsetminus A}.$$

Die Zerlegung spaltet also das Spektrum auf.

Beweis. Es gilt $T|_B = T\,\mathbf{1}_A = \int_{\sigma(T)} t\,\mathbf{1}_A(t)\, d\mu(t) = \int_A t\, d\mu(t)$. Ist $\lambda \notin \overline{A}$, dann ist $f(t) = (t-\lambda)^{-1}$ stetig auf $\overline{A}$, das Integral $S = \int_A (t-\lambda)^{-1}\, d\mu(t)$ ist ein Operator, fuer den gilt

$$(T - \lambda)S = \int_A (t-\lambda)(t-\lambda)^{-1}\, d\mu(t) = \int_A 1\, d\mu = \mu(A).$$

Das bedeutet $\lambda \notin \sigma\left(T|_B\right)$. Damit folgt die Behauptung fuer A, fuer das Komplement ersetzt man A durch sein Komplement. □

Mit dem Lemma zeigen wir fuer das auf K definierte Spektralmaß μ, dass

$$\operatorname{supp}(\mu) = \sigma(T).$$

Sei $U \subset K$ eine offene Menge mit $\mu(U) = 0$. Dann bedeutet das nach dem Lemma , dass $\sigma(T) \subset U^c$, also folgt $\sigma(T) \subset \operatorname{supp}(\mu)$. Fuer die umgekehrte Inklusion sei $\lambda \in \operatorname{supp}(\mu)$. Fuer jede offene Umgebung U von λ ist dann $\mu(U) \neq 0$. Da das Spektrum von $T|_U$ nichtleer ist, folgt nach dem Lemma, dass $\sigma(T) \cap U \neq \emptyset$ und damit $\lambda \in \sigma(T)$.

Schliesslich zur letzten Aussage $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$. Diese folgt sofort aus

Lemma 4.5.4. *Fuer $f \in C(\sigma(T))$ gilt*

$$\mu_{f(T)} = f_*\mu_T$$

und

$$\operatorname{supp}(f_*\mu) = f(\operatorname{supp}(\mu)).$$

Beweis. Es gilt

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(t)\, d\mu(t) = \int_{f(\sigma(T))} t\, d(f_*\mu(t)),$$

so dass die erste Aussage aus der Eindeutigkeit des Spektralmaßes folgt. Fuer Bildmaße stetiger Funktionen gilt stets $\operatorname{supp}(f_*\mu) = \overline{f(\operatorname{supp}(\mu))}$. Da $\sigma(T)$ kompakt ist, ist $f(\operatorname{supp}(\mu))$ kompakt, also abgeschlossen und die Behauptung folgt. □

Mit dem Lemma ist auch der Satz bewiesen. □

Beispiel 4.5.5. Sei $H = L^2([0,1])$ und $T : H \to H$ definiert durch

$$T(\phi)(x) = x\phi(x).$$

Dann ist das Spektralmaß μ gegeben durch

$$\mu(A)\phi(x) = \mathbf{1}_A(x)\phi(x).$$

Beweis. Dass dies ein Spektralmaß ist, haben wir uns schon überlegt. Wir beweisen nun, dass es das Spektralmaß zu T ist, indem wir für $\phi, \psi \in H$ und $f \in C(\sigma(T)) = C([0,1])$ rechnen:

$$\left\langle \left(\int_{[0,1]} f(t)\, d\mu(t) \right) \phi, \psi \right\rangle = \int_{[0,1]} f(t) d\mu_{\phi,\psi}.$$

Sind $\phi = \mathbf{1}_A$ und $\psi = \mathbf{1}_B$ für messbare Teilmengen $A, B \subset [0,1]$, dann gilt

$$\mu_{\phi,\psi}(S) = \left\langle \mu(S)\phi, \psi \right\rangle = \langle \mathbf{1}_S \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B \rangle = \lambda(A \cap B \cap S),$$

wobei λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$ ist. Daher ist in diesem Fall

$$\left\langle \left(\int_{[0,1]} f(t)\, d\mu(t) \right) \phi, \psi \right\rangle = \int_{A\cap B} f(t)\, d\lambda(t).$$

Andererseits ist $f(T)\phi(x) = f(x)\phi(x)$ und daher

$$\left\langle f(T)\phi, \psi \right\rangle = \int_{A\cap B} f(x)\, d\lambda(x).$$

Da die Funktionen der Form $\mathbf{1}_A$ in $L^2([0,1])$ einen dichten Teilraum erzeugen, folgt die Gleichheit

$$\left\langle \left(\int_{[0,1]} f(t)\, d\mu(t) \right) \phi, \psi \right\rangle = \left\langle f(T)\phi, \psi \right\rangle$$

allgemein. □

* * *

5 Kompakte Operatoren

5.1 Jordan Normalform für kompakte Operatoren

Definition 5.1.1. Ein Operator T auf einem Hilbert-Raum H heisst **kompakter Operator**, falls T beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.

Lemma 5.1.2. *Für einen stetigen Operator T auf einem Hilbert-Raum H sind äquivalent:*

(a) *T ist kompakt.*

(b) *Ist B der abgeschlossene Einheitsball in H, dann ist $\overline{T(B)}$ kompakt.*

(c) *Ist (v_j) eine beschränkte Folge in H, dann hat die Folge (Tv_j) eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. (a)⇒(b) ist klar.

(b)⇒(c): Sei (v_j) eine beschraenkte Folge, etwa $\|v_j\| \leq C$ fuer ein $C > 0$. Dann ist $w_j = \frac{1}{C}v_j$ eine Folge im abgeschlossenen Einheitsball B. Dann ist (Tw_j) eine Folge im Kompaktum TB, hat also eine konvergente Teilfolge und dasselbe gilt dann fuer $Tv_j = CTw_j$.

(c)⇒(a): Ist X beschränkt, dann hat nach (c) jede Folge in $T(X)$ eine konvergente Teilfolge, damit ist $T(X)$ relativ kompakt. □

Definition 5.1.3. Eine lineare Abbildung $F : H \to H$ auf einem Hilbert-Raum H heisst **von endlichem Rang**, falls das Bild $F(H)$ endlich-dimensional ist.

Beispiele 5.1.4. (a) Jeder Operator von endlichem Rang ist kompakt.

(b) Der Operator $T = \mathrm{Id}_H$ ist genau dann kompakt, wenn H endlich-dimensional ist.

(c) Sei (c_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ und sei

$$T : H \to H,$$
$$(x_1, x_2, \dots) \mapsto (c_1x_1, c_2x_2, \dots)$$

Der Operator ist stetig. Er ist genau dann kompakt, wenn (c_n) eine Nullfolge ist.

Beweis. Sei T kompakt und **nimm an**, (c_n) ist keine Nullfolge. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so dass für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$ gilt $|c_j| \geq \varepsilon$. Sei $\{j_1, j_2, \dots\}$ die Menge dieser Indizes. Sei dann $v_k = e_{j_k} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ mit der Eins an der j_k-ten Stelle. Für $k \neq l$ gilt

$$\|T(v_k) - T(v_l)\|^2 = |c_{j_k}|^2 + |c_{j_l}|^2 \geq 2\varepsilon^2.$$

Daher kann $T(v_j)$ keine konvergente Teilfolge haben, **Widerspruch!**

Die Rückrichtung folgt leicht aus dem später zu beweisenden Satz 5.2.4. □

Proposition 5.1.5. *Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ die Menge aller kompakten Operatoren auf H. Dann ist $\mathcal{K}$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$. Ausserdem gilt*

$$K \in \mathcal{K},\ T \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad KT, TK \in \mathcal{K},$$

d.h., $\mathcal{K}$ ist ein **Ideal** *in der Algebra $\mathcal{B}$.*

Beweis. Fuer die erste Aussage ist zu zeigen, dass mit K, L auch $\lambda K + \mu L$ in $\mathcal{K}$ liegen, wenn $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sind. Sei dazu (v_j) eine beschraenkte Folge in H. Dann gibt es eine Teilfolge $v_j^{(1)}$, so dass $K(v_j^{(1)})$ konvergiert. Von dieser gibt es eine Teilfolge $v_j^{(2)}$, so dass auch $L(v_j^{(2)})$ konvergiert. Dann konvergiert auch $\lambda K(v_j^{(2)}) + \mu L(v_j^{(2)})$.

Fuer die zweite Aussage sei $B \subset H$ beschraenkt. Dann ist $T(B)$ beschraenkt, also ist $K(T(B))$ relativ kompakt und daher ist KT kompakt. Fuer die andere Reihenfolge sei (v_j) eine beschraenkte Folge. Dann hat $K(v_j)$ eine konvergente Teilfolge $K(v_{j_k})$ un dann ist aber auch die Folge $T(K(v_{j_k}))$ konvergent. □

Lemma 5.1.6. *Ist T kompakt, dann auch $|T|$ und T^*.*

Beweis. Wir schreiben $T = U|T|$, wobei $U : \overline{\mathrm{Bild}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Bild}(T)}$ eine Isometrie ist. Als solche hat sie eine Umkehrabbildung V, die ebenfalls eine Isometrie ist, also gilt $|T| = VT$ und V kann durch Null auf $\mathrm{Bild}(T)^\perp$ fortgesetzt werden zu einem stetigen Operator auf H. Daher ist $|T|$ kompakt. Wir setzen auch U durch Null fort und erhalten $T^* = (U|T|)^* = |T|U^*$. Damit ist auch T^* kompakt. □

Lemma 5.1.7. *Ist $T : H \to H$ kompakt, dann ist das Bild von $T - I$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(T - I)x_n \to y$ konvergent in H. Wir müssen zeigen, dass y im Bild von $(T - I)$ liegt.

Wir zeigen zunächst, dass der Abstand

$$d\Big(x_n, \ker(T - I)\Big) = \inf_{z \in \ker(T-I)} \|x_n - z\|$$

beschränkt sein muss. Wir gehen zu $H/\ker(T - I)$ über und müssen zeigen, dass unter der Voraussetzung $\ker(T - I) = 0$ die Folge x_n beschränkt sein muss. **Nimm das Gegenteil an** und sei x_{n_k} eine Teilfolge mit $\left\|x_{n_k}\right\| \geq k$ und sei $z_k = \frac{1}{\|x_{n_k}\|} x_{n_k}$. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen, dass Tz_k konvergiert. Dann ist $(T - I)z_k = \frac{1}{\|x_{n_k}\|}(T - I)x_{n_k} \to 0$. Damit konvergiert auch $z_k = Tz_k - (T - I)z_k$, sei z der Limes, so folgt $(T - I)z = 0$, also, nach unserer Voraussetzung, $z = 0$. Andererseits ist aber $\|z\| = \lim_k \|z_k\| = 1$, ein **Widerspruch!**

Da nun der Abstand $d(x_n, \ker(T - I))$ beschränkt ist, können wir x_n durch $x_n - z_n$ mit $z_n \in \ker(T - I)$ ersetzen und annehmen, dass x_n beschränkt ist. Dann hat Tx_n eine konvergente Teilfolge, damit hat $x_n = Tx_n - (T - I)x_n$ eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x$, dann folgt $(T - I)x = \lim_k (T - I)x_{n_k} = y$, also liegt y im Bild. □

Satz 5.1.8 (Jordan-Normalform-Satz)**.** *Sei T ein kompakter Operator.*

(a) *Jedes $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ ist ein Eigenwert.*

(b) *Für jedes $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ so dass $\ker(T-\lambda)^m = \ker(T-\lambda)^{m+1}$ und dieser Raum wird der* **Hauptraum** *$H(\lambda)$ zum Eigenwert λ genannt. Er ist endlich-dimensional.*

(c) *Die Eigenwerte können sich nur bei Null häufen. Ist $\dim H = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.*

(d) *$\sigma(T)$ ist abzählbar.*

Beweis. (a) Nach Skalierung können wir $\lambda = 1$ annehmen. **Angenommen**, $\lambda = 1 \in \sigma(T)$ ist kein Eigenwert, so heisst das, dass $(I-T)$ injektiv, aber nicht surjektiv ist. Damit ist $H_1 = \mathrm{Bild}(I-T)$ ein echter, nach Lemma 5.1.7 abgeschlossener Unterraum von H, also gilt

$$H = H_1 \oplus \underbrace{H_1^\perp}_{\neq 0}$$

und da $(I-T)$ injektiv ist, folgt

$$H_1 = (I-T)H_1 \oplus \underbrace{(I-T)H_1^\perp}_{\neq 0}.$$

Daher ist $H_2 = (I-T)(H_1)$ ein echter abgeschlossener Unterraum von H_1. Setze $H_n = (I-T)^n(H)$. Wir erhalten eine absteigende Folge abgeschlossener Teilräume

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$$

wobei alle Inklusionen echt sind, also niemals Gleichheit herrscht. Sei nun $x_n \in H_n$ mit $\|x_n\| = 1$ und $x_n \perp H_{n+1}$. Damit gilt also $d(x_n, H_{n+1}) = 1$. Da T kompakt ist, hat Tx_n eine konvergente Teilfolge. Es ist aber für $m < n$.

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \left\| \underbrace{(I-T)x_m - (I-T)x_n + x_n}_{\in H_{m+1}} - x_m \right\| \geq 1.$$

Widerspruch!

(b) Wieder können wir $\lambda = 1$ annehmen. Die Folge $E_n = \ker(T-I)^n$ ist eine aufsteigende Folge abgeschlossener Unterräume. Beachte zunächst, dass aus $E_n = E_{n+1}$ schon folgt $E_n = E_{n+k}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, denn ist $v \in \ker(T-I)^{n+k+1}$, dann ist $(T-I)v \in \ker(T-I)^{n+k} = \ker(T-I)^n$, also ist $v \in \ker(T-I)^{n+1} = \ker(T-I)^n$. Die Behauptung sagt also, dass diese Folge stationär wird. **Angenommen**, dies ist nicht der Fall, dann gibt es $y_n \in E_n$ mit $\left\|y_n\right\| = 1$ und $y_n \perp E_{n-1}$. Wieder muss

Ty_n eine konvergente Teilfolge haben, es ist aber für $m < n$

$$\left\|Ty_n - Ty_m\right\| = \left\|\underbrace{(T-I)y_n - (T-I)y_m + y_m}_{\in E_{n-1}} - y_n\right\| \geq 1.$$

Widerspruch!

Zur Endlich-Dimensionalität: Sei S die Einssphäre in $\ker(T-I)$, dann ist $S = \ker(T-I) \cap T(S)$ und damit ist S kompakt, also ist $\ker(T-I)$ endlich-dimensional. Durch Übergang zu $H/\ker(T-I)$ erhalten wir, dass auch $\ker(T-I)^2$ endlich-dimensional ist und so fort.

(c) **Angenommen**, die Eigenwerte häufen sich woanders. Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, so dass es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge von Vektoren x_j gibt mit $\left\|x_j\right\| = 1$ und paarweise verschiedene λ_j, so dass $\lambda_j \to \lambda$. Sei $H_n = \text{Spann}(x_1, \dots, x_n)$. Waehle $y_n \in H_n$ mit $\left\|y_n\right\| = 1$ und $y_n \perp H_{n-1}$. Fuer $m < n$ gilt dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda_n}Ty_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m &= y_n + \left(-y_m + \frac{1}{\lambda_n}(T-\lambda_n)y_n - \frac{1}{\lambda_m}(T-\lambda_m)y_m\right)\\ &= y_n - w_{m,n}\end{aligned}$$

mit $w_{m,n} \in H_{n-1}$. Also

$$\left\|\frac{1}{\lambda_n}Ty_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m\right\|^2 = \underbrace{\left\|y_n\right\|^2}_{1} + \left\|w_{m,n}\right\|^2 \geq 1.$$

Nach Uebergang zu einer Teilfolge kann Ty_n also konvergent angenommen werden. Sei z der Limes. Es gilt dann

$$\begin{aligned}1 &\leq \lim_n \lim_m \left\|\frac{1}{\lambda_n}Ty_n - \frac{1}{\lambda_m}Ty_m\right\|\\ &= \left\|\frac{1}{\lambda}z - \frac{1}{\lambda}z\right\| = 0.\end{aligned}$$

Widerspruch! Ist schliesslich die Dimension unendlich, so gibt es unendlich viele Eigenwerte, da das Spektrum abgeschlossen ist, muss Null im Spektrum sein. Teil (d) ist klar. □

Beispiel 5.1.9. Sei $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \dots)$. Dann ist T kompakt, hat aber keinen Eigenwert, also folgt $\sigma(T) = 0$.

Beweis. Sei T_n der Operator $T_n(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{n}x_n, 0, \dots)$. Dann hat T_n endlichen Rang und $\|T_n - T\|_{\text{op}} \to 0$, wie man leicht sieht. Im naechsten Absatz zeigen wir, dass ein Operator genau dann kompakt ist, wenn er Norm-Limes von Operatoren endlichen Rangs ist, damit ist T kompakt. Da T injektiv ist, ist Null kein Eigenwert. Sei also $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ und $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ mit $Tx = \lambda x$. Dann ist $\lambda x_1 = 0$, also $x_1 = 0$. Weiter ist $\lambda x_2 = x_1 = 0$, also $x_2 = 0$ und so weiter, so dass $x = 0$ folgt. □

Beispiel 5.1.10. Ein weiteres Beispiel fuer einen kompakten Operator mit trivialem Spektrum ist der

Volterra Operator $V : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,

$$Vf(x) = \int_0^x f(y)\,dy.$$

Beweis. Wir werden in Abschnitt 5.3 zeigen, dass Operatoren mit L^2-Kern kompakt sind. Damit ist V kompakt. Ferner hat V keinen Eigenwert. Zunaechst ist Null kein Eigenwert, denn ist $Vf = 0$, dann ist $\int_I f(y)\,dy = 0$ fuer jedes Intervall und damit fuer jede messbare Menge, so dass $f = 0$ folgt. Ferner ist $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ kein Eigenwert, denn aus $Vf = \lambda f$ folgt

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\int_0^x f(y)\,dy.$$

Die rechte Seite ist stetig in x, also ist f stetig. Dann ist die rechte Seite aber differenzierbar, also ist f differenzierbar. Es folgt

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x)$$

und damit $f(x) = ce^{x/\lambda}$ fuer ein $c \in \mathbb{C}$. Das widerspricht aber $f(0) = \int_0^0 = 0$. Also hat V keinen Eigenwert und daher ist $\sigma(V) = \{0\}$. □

* * *

5.2 Spektralsatz für kompakte normale Operatoren

Satz 5.2.1 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren)**.**
Sei T ein kompakter normaler Operator auf dem Hilbert-Raum H. Es existiert eine Folge $\lambda_j \in \mathbb{C}^\times$, die entweder endlich ist oder gegen Null geht, so dass der Raum H sich orthogonal zerlegt:

$$H = \operatorname{Ker}(T) \oplus \overline{\bigoplus_j \operatorname{Eig}(T, \lambda_j)}.$$

Jeder **Eigenraum** $\operatorname{Eig}(T,\lambda_j) = \{v \in H : Tv = \lambda_j v\}$ *ist endlich-dimensional und die Eigenräume sind paarweise orthogonal.*

Beweis. Sei $T \neq 0$ ein kompakter normaler Operator. Nach Satz 4.1.11 ist der Spektralradius gleich der Operatornorm, also gibt es einen Spektralwert $\lambda \neq 0$. Aus dem Jordan-Normalform-Satz 5.1.8 folgt, dass jeder kompakte normale Operator $T \neq 0$ einen Eigenwert $\lambda \neq 0$ hat. Sei $U \subset H$ der Abschluss der Summe aller Eigenräume von T, die Eigenwerte $\neq 0$ haben. Nach Satz 3.2.3 ist jeder Eigenvektor von T auch ein Eigenvektor von T^*. also ist U stabil unter T und T^*. Das orthogonale Komplement $U^\perp$ ist dann ebenfalls stabil unter T und T^*. Der Operator T induziert einen kompakten normalen Operator auf $U^\perp$. Dieser kann keinen Eigenwert $\neq 0$ haben, muss also der Nulloperator sein. Also ist $U^\perp$ der Kern von T. Wir haben damit gezeigt, dass H die direkte Summe von T-Eigenräumen ist. Ferner ist nach dem

JNF-Satz jeder Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ mit $\lambda \neq 0$ endlich-dimensional und die Eigenwerte können sich nicht in $\mathbb{C}^\times$ häufen. Der Satz ist bewiesen. □

Korollar 5.2.2 (Umformulierung des Spektralsatzes)**.** *Sei T ein normaler kompakter Operator auf einem Hilbert-Raum H. Seien λ_j die Eigenwerte wie im Satz und sei P_j die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda_j)$, dann gilt*

$$T = \sum_j \lambda_j P_j,$$

wobei die Reihe in der Operatornorm konvergiert. Ist umgekehrt λ_j eine beliebige Nullfolge in $\mathbb{C}^\times$ und ist (P_j) eine beliebige Folge von paarweise orthogonalen Orthogonalprojektionen mit endlich-dimensionalen Bildern, dann ist die Reihe $\sum_j \alpha_j P_j$ normkonvergent gegen einen kompakten Operator.

Beweis. Klar. □

Korollar 5.2.3 (Noch eine Umformulierung)**.** *Sei $T : H \to H$ ein normaler kompakter Operator. Dann hat H eine Orthonormalbasis $(\phi_j)_{j\in I}$ bestehend aus Eigenvektoren von T, d.h. für jedes j existiert ein $\lambda_j \in \mathbb{C}$ mit $T\phi_j = \lambda_j \phi_j$.*

Für jedes $C > 0$ ist die Menge aller $j \in J$ mit $|\lambda_j| > C$ endlich.

Beweis. Klar. □

Satz 5.2.4. *Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ der Raum der kompakten Operatoren. Dann ist $\mathcal{K}$ ein abgeschlossener Teilraum, also selbst ein Banach-Raum. Genauer ist er der Normabschluss des Raums der Operatoren von endlichem Rang.*

Beweis. Sei $T_n \to T$ eine normkonvergente Folge kompakter Operatoren. Wir muessen zeigen, dass T wieder kompakt ist. Sei v_i eine Folge mit $\|v_i\| = 1$. Sei dann $v^{(1)}$ eine Teilfolge, so dass $T_1(v^{(1)})$ konvergiert. Sei dann $v^{(2)}$ eine Teilfolge von $V^{(1)}$ so dass auch $T_2(v^{(2)})$ konvergiert und so fort. Sei dann $w_j = v_j^{(j)}$. Dann konvergiert $T_n w_j$ fuer jedes n. Sei u_n der Limes. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es n_0 so dass $\|T_n - T\|_{\mathrm{op}} < \varepsilon$ fuer alle $n \geq n_0$. Sei also $n \geq n_0$. Dann gilt $\left\|T_n w_j - T w_j\right\| < \varepsilon \left\|w_j\right\| = \varepsilon$. Also folgt

$$\begin{aligned}\left\|Tw_i - Tw_j\right\| &\leq \|Tw_i - T_n w_i\| + \left\|T_n w_i - T_n w_j\right\| + \left\|T_n w_j - T w_j\right\| \\ &\leq 2\varepsilon + \left\|T_n w_i - T_n w_j\right\|.\end{aligned}$$

Nun ist $(T_n w_j)_j$ eine Cauchy-Folge und damit ist (Tw_j) ebenfalls eine Cauchy-Folge, also konvergent. Folglich ist T kompakt.

Sei schliesslich $T \in \mathcal{K}$ und $\varepsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass T der Norm-Limes einer Folge von Operatoren von endlichem Rang ist. Schreibe dazu $T = R + iS$, wobei R und S die selbstadjungierten Operatoren $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ und $S = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ sind. Dann sind R und S wieder kompakt. Kann man R und S jeweils als Limes schreiben, dann auch T. Es reicht also, $T = T^*$ anzunehmen. Ist T selbst von endlichem Rang, sind wir fertig. Sonst bilden die Eigenwerte (λ_i) eine Nullfolge. Wir ordnen die Eigenwerte so, dass $|\lambda_i| \geq |\lambda_{i+1}|$. Sei dann P_j die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda_j)$ und sei

$$F_n = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j.$$

Dann ist F_n von endlichem Rang, $T - F_n$ normal und kompakt und nach dem Spektralsatz hat $T - F_n$ die Eigenwerte $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots$. Dann ist

$$\|T - F_n\|_{\mathrm{op}} = r(T - F_n) = |\lambda_{n+1}|$$

und diese Folge geht gegen Null. □

* * *

5.3 Hilbert-Schmidt-Operatoren

Lemma 5.3.1. *Sei $T \in \mathcal{B}(H)$, und sei (e_j) eine Orthonormalbasis von H. Die Zahl*

$$\|T\|_2 := \sqrt{\sum_j \left\|Te_j\right\|^2} \quad \in \quad [0, \infty]$$

hängt nicht von der Wahl der ONB ab. Es gilt ferner $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$. Diese Zahl heisst **Hilbert-Schmidt-Norm** *des Operators T.*

Beweis. Zunächst halten wir fest, dass für zwei Vektoren $v, w \in H$ und eine beliebige ONB (e_j) gilt

$$\langle v, w\rangle = \sum_j \left\langle v, e_j\right\rangle \left\langle e_j, w\right\rangle.$$

Sei nun (ϕ_α) eine zweite ONB. Da wir die Unabhängigkeit noch nicht gezeigt haben, schreiben wir $\|T\|_2^2\,(e_i)$ und $\|T\|_2^2\,(\phi_\alpha)$, für die entsprechenden Hilbert-Schmidt-Normen. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\|T\|_2^2\,(e_j) &= \sum_j \sum_\alpha \left\langle Te_j, \phi_\alpha\right\rangle \left\langle \phi_\alpha, Te_j\right\rangle \\
&= \sum_j \sum_\alpha \left\langle e_j, T^*\phi_\alpha\right\rangle \left\langle T^*\phi_\alpha, e_j\right\rangle \\
&= \sum_\alpha \sum_j \left\langle e_j, T^*\phi_\alpha\right\rangle \left\langle T^*\phi_\alpha, e_j\right\rangle = \|T^*\|_2^2\,(\phi_\alpha).
\end{aligned}$$

Die Vertauschung ist gerechtfertigt, da alle Summanden positiv sind. Indem wir dies zunächst für $(e_j) = (\phi_\alpha)$ und dann für T^* anstelle von T anwenden, erhalten wir

$$\|T\|_2^2\,(e_j) = \|T^*\|_2^2\,(e_j) = \|T\|_2^2\,(\phi_\alpha).$$ □

Definition 5.3.2. Der Operator T heisst ein **Hilbert-Schmidt-Operator**, falls

$$\|T\|_2 < \infty.$$

Satz 5.3.3.

(a) *Für jeden beschränkten Operator T auf H gilt*

$$\|T\|_{\mathrm{op}} \le \|T\|_2 .$$

Für jeden unitären Operator U ist $\|UT\|_2 = \|TU\|_2 = \|T\|_2$. Es gilt $\|T\|_2 = \||T|\|_2$.

(b) *Die Menge $\mathcal{B}_2(H)$ aller Hilbert-Schmidt-Operatoren ist ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(H)$. Die Vorschrift*

$$\langle S, T\rangle_2 = \sum_j \left\langle Se_j, Te_j \right\rangle$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{B}_2$, das nicht von der Wahl der ONB (e_j) abhängt und $\mathcal{B}_2$ zu einem Hilbert-Raum macht.

(c) *Jeder Hilbert-Schmidt-Operator ist kompakt.*

(d) *Sei T ein normaler kompakter Operator und seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ die Eigenwerte, wobei jeder nach seiner Vielfachheit wiederholt wird. Dann ist*

$$\sum_j |\lambda_j|^2 = \|T\|_2^2 .$$

Das heisst, ein normaler kompakter Operator ist genau dann Hilbert-Schmidt, wenn seine Eigenwerte eine ℓ^2-Folge bilden.

Beweis. (a) Sei $v \in H$ mit $\|v\| = 1$. Dann existiert eine ONB (e_j) mit $e_1 = v$. Es folgt

$$\|Tv\|^2 = \|Te_1\|^2 \le \sum_j \left\|Te_j\right\|^2 = \|T\|_2^2 .$$

und damit $\|T\|_{\mathrm{op}} \le \|T\|_2$.

Da mit (e_j) auch (Ue_j) eine ONB ist, folgt der Rest. Ist $T = U|T|$ die Polarzerlegung nach Satz 4.3.1, dann folgt

$$\|T\|_2^2 = \sum_j \left\|Te_j\right\|^2 = \sum_j \left\|U|T|e_j\right\|^2 = \sum_j \left\||T|e_j\right\|^2 = \|\, |T|\, \|_2 .$$

(b) Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Hoelder-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned}\sum_j \left|\left\langle Se_j, Te_j\right\rangle\right| &\le \sum_j \left\|Se_j\right\| \left\|Te_j\right\| \\ &\le \left(\sum_j \left\|Se_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_j \left\|Te_j\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|S\|_2 \, \|T\|_2 < \infty,\end{aligned}$$

also konvergiert die Reihe absolut. Für $S, T \in \mathcal{B}_2$ folgt

$$\infty > |\, \langle S, S\rangle_2 + \langle T, T\rangle_2 + \langle S, T\rangle_2 + \langle T, S\rangle_2 \,| = \|S + T\|_2 \, .$$

Damit ist auch $S + T \in \mathcal{B}_2$, die Menge $\mathcal{B}_2$ also ein Vektorraum. Schließlich ist $\langle ., .\rangle_2$ ein Skalarprodukt mit Norm $\|.\|_2$ und die Polarisierungsidentität aus Korollar 1.5.9 zeigt, dass $\langle ., .\rangle_2$ nicht von der Wahl der ONB abhängt.

Zur Vollstaendigkeit: Sei $(e_i)_{i\in I}$ eine ONB. Wir zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{B}_2 &\to \ell^2(I \times I), \\ T &\mapsto \left(\left\langle Te_i, e_j\right\rangle\right)_{(i,j)\in I\times I}\end{aligned}$$

ein Isomorphismus ist. Es gilt

$$\left\|\phi(T)\right\|_{\ell^2}^2 = \sum_{i,j\in I} \left|\left\langle Te_i, e_j\right\rangle\right|^2 = \sum_{i\in I} \underbrace{\sum_{j\in I} \left|\left\langle Te_i, e_j\right\rangle\right|^2}_{\|Te_i\|^2} = \|T\|_2^2 \, .$$

Beachte, dass diese Rechnung fuer jeden linearen Operator auf H gilt. Damit liegt $\phi(T)$ tatsaechlich in ℓ^2 und ϕ ist eine Isometrie. Fuer die Surjektivitaet sei $(a_{i,j})$ in $\ell^2(I \times I)$. Definiere einen Operator T durch

$$Tv = T\left(\sum_{i\in I} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i,j\in I} \lambda_i a_{i,j} e_j.$$

Zur Wohldefiniertheit rechnen wir, zunaechst formal:

$$\|Tv\|^2 = \sum_{j\in I} \left|\sum_i \lambda_i a_{i,j}\right|^2 \le \sum_j \left(\sum_i |\lambda_i|^2\right)\left(\sum_i |a_{i,j}|^2\right) = \left\|(a_{i,j})\right\|^2 \; \|v\|^2 \, .$$

Es liegt $\left\langle Te_i, e_j\right\rangle = a_{i,j}$ in ℓ^2 und damit ist $\phi(T) = (a_{i,j})$. Also ist ϕ ein unitaerer Isomorphismus und folglich $\mathcal{B}_2$ ein Hilbert-Raum.

(c) Sei T ein Hilbert-Schmidt-Operator und sei $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthonormale Folge. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^\infty \left\|Te_j\right\|^2$. Fuer $n \in \mathbb{N}$ sei T_n der Operator

$$v \mapsto \sum_{j=1}^n \left\langle v, e_j\right\rangle Te_j.$$

Dieser hat endlichen Rang und es gilt

$$\begin{aligned}\|T_n v - Tv\|^2 &= \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\langle v, e_j \right\rangle Te_j \right\|^2 \\ &\le \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|\left\langle v, e_j\right\rangle\right|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\|Te_j\right\|^2 \\ &\le \|v\|^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} \left\|Te_j\right\|^2.\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck geht gegen Null fuer $n \to \infty$. Nimmt man das Supremum ueber alle v mit $\|v\| = 1$, so erhaelt man $\|T_n - T\|_{\text{op}} \to 0$. Damit ist T ein Norm-Limes von Operatoren von endlichem Rang, also kompakt.

(d) Es existiert eine ONB (e_j), die aus Eigenvektoren besteht, also $Te_j = \lambda_j e_j$. Dann ist

$$\sum_j |\lambda_j|^2 = \sum_j \left\langle Te_j, Te_j \right\rangle. \qquad \square$$

Lemma 5.3.4. *Die Menge der Operatoren von endlichem Rang liegt bzgl der Norm $\|.\|_2$ dicht in $\mathcal{B}_2$.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{B}_2$ und sei $(e_i)_{i\in I}$ eine ONB. Dann gilt $\sum_{i\in I} \|Te_i\|^2 < \infty$, also sind nur abzaehlbar viele der Te_i ungleich Null. Seien diese durch $Te_1, Te_2, \dots$ gegeben. Fuer $n \in \mathbb{N}$ sei dann der Operator T_n definiert durch

$$T_n v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, e_i \rangle\, Te_i.$$

Dann ist T_n von endlichem Rang und es gilt

$$\|T_n - T\|_2^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \|Te_i\|^2$$

und dieser Ausdruck geht gegen Null fuer $n \to \infty$. $\square$

Definition 5.3.5. Sei μ ein σ-endliches Maß auf einer σ-Algebra auf einer Menge X. Betrachte den Hilbert-Raum $L^2(X)$. Sei k eine Funktion in $L^2(X \times X)$. Wir nennen k einen L^2**-Kern**.

Der **Integraloperator** I_k zum Kern k ist definiert durch

$$I_k\phi(x) := \int_X k(x, y)\phi(y)\, dy,$$

wobei wir abkuerzend dy statt $d\mu(y)$ geschrieben haben.

Proposition 5.3.6. (a) *Fuer $\phi \in L^2(\mu)$ existiert das Integral $I_k\phi$ fast überall in x. Die Funktion $I_k\phi$ liegt in*

$L^2(X)$ und I_k ist ein Hilbert-Schmidt-Operator $I_k : L^2(X) \to L^2(X)$ mit

$$\|I_k\|_2^2 = \int_X \int_X |k(x,y)|^2 \, dx \, dy = \|k\|_2^2 .$$

(b) *Ist umgekehrt T ein Hilbert-Schmidt-Operator auf $L^2(\mu)$, dann gibt es einen L^2-Kern k, so dass $T = I_k$ gilt.*

(c) *Es gilt $I_k^* = I_{k^*}$ mit*

$$k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}.$$

(d) *Es gilt $I_k \circ I_l = I_{k*l}$ mit*

$$k * l(x,y) = \int_X k(x,z)\, l(z,y) \, dz.$$

Beweis. (a) Um die Existenz des Integrals zu zeigen, sei ψ ein beliebiges Element von $L^2(X)$. Dann liegt die Abbildung $(x,y) \mapsto \psi(x)\phi(y)$ in $L^2(X \times X)$ und daher ist die Funktion $(x,y) \to k(x,y)\phi(y)\psi(x)$ integrierbar über $X \times X$. Nach dem Satz von Fubini folgt, dass

$$\int_X \psi(x) k(x,y)\phi(y) \, dy = \psi(x) \int_X k(x,y)\phi(y) \, dy$$

für fast alle $x \in X$ existiert. Da ψ beliebig ist, folgt die behauptete Existenz des Integrals.

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung schätzen wir ab

$$\begin{aligned}
\left\|I_k\phi\right\|^2 &= \int_X |I_k\phi(x)|^2 \, dx = \int_X \left| \int_X k(x,y)\phi(y) \, dy \right|^2 \, dx \\
&\le \int_X \int_X |k(x,y)|^2 \, dx \, dy \ \int_X |\phi(y)|^2 \, dy \\
&= \int_X \int_X |k(x,y)|^2 \, dx \, dy \ \left\|\phi\right\|^2 .
\end{aligned}$$

Also definiert I_k einen stetigen Operator auf $L^2(X)$. Sei (e_j) eine ONB von $L^2(X)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|I_k\|_2^2 &= \sum_j \left\langle I_k e_j, I_k e_j \right\rangle = \sum_j \int_X I_k e_j(x) \overline{I_k e_j(x)} \, dx \\
&= \sum_j \int_X \int_X k(x,y) e_j(y) \, dy \overline{\int_X k(x,y) e_j(y) \, dy} \, dx \\
&= \sum_j \int_X \left\langle k(x,.), e_j \right\rangle \left\langle e_j, k(x,.) \right\rangle \, dx \\
&= \int_X \sum_j \left\langle k(x,.), e_j \right\rangle \left\langle e_j, k(x,.) \right\rangle \, dx \\
&= \int_X \langle k(x,.), k(x,.) \rangle \, dx = \int_X \int_X |k(x,y)|^2 \, dx \, dy.
\end{aligned}$$

(b) Fuer die Umkehrung beachte, dass die Abbildung $k \mapsto I_k$ eine Isometrie ist, also abgeschlossenes Bild in $\mathcal{B}_2$ hat. Sei T ein Operator von Rang 1. Dann gibt es $f, g \in L^2(\mu)$, so dass $T(v) = \langle v, f \rangle\, g$. Daher ist

$k(x,y) = g(x)\overline{f(y)}$ ein Kern fuer T. Damit liegen alle Rang-1-Operatoren im Bild und auch ihre Linearkombinationen, das sind aber alle Operatoren von endlichem Rang und die liegen dicht in $\mathcal{B}_2$.

(c) und (d) folgen durch Rechnung. □

Proposition 5.3.7. *Fuer $S, T \in \mathcal{B}(H)$ gilt*

(a) $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$,

(b) $\|ST\|_2 \le \|S\|_{\text{op}}\ \|T\|_2$, $\qquad \|TS\|_2 \le \|S\|_{\text{op}}\ \|T\|_2$.

Insbesondere folgt: ist T ein Hilbert-Schmidt-Operator, dann auch T^*, ST und TS, also ist $\mathcal{B}_2$ ein zweiseitiges $*$-Ideal in $\mathcal{B}(H)$.

Beweis. (a) Fuer eine ONB (e_i) gilt

$$\begin{aligned} \|T^*\|_2^2 &= \sum_i \|T^*e_i\|^2 \\ &= \sum_i \langle T^*e_i, T^*e_i\rangle \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{k\in I} \langle T^*e_i, e_k\rangle \langle e_k, T^*e_i\rangle \\ &= \sum_{i\in I}\sum_{k\in I} \langle e_i, Te_k\rangle \langle Te_k, e_i\rangle\,. \end{aligned}$$

Nun darf die Summationsreihenfolge geaendert werden, da die Summanden ≥ 0 sind dann rechnet man rueckwaerts und erhalt $\|T\|_2^2$.

(b) Fuer eine ONB $(e_i)_{i\in I}$ gilt

$$\sum_{i\in I} \|STe_i\|^2 \le \sum_{i\in I} \|S\|_{\text{op}}^2\ \|Te_i\|^2\,,$$

so dass die erste Aussage folgt. Fuer die Zweite ersetzt man T durch T^*, sowie S durch S^* und wendet die erste Aussage an. □

5.4 Spurklasse-Operatoren

Lemma 5.4.1. *Sei T ein beschränkter Operator auf einem Hilbert-Raum H und sei (e_j) eine Orthonormalbasis von H. Die Zahl*

$$\|T\|_1 := \sum_j \Big\langle |T|e_j, e_j\Big\rangle \quad \in \quad [0,\infty]$$

hängt nicht von der Wahl der ONB ab. Diese Zahl heisst die **Spurnorm** *von T. Der Operator T heißt* **Spurklasse-Operator***, falls*

$$\|T\|_1 < \infty.$$

Beweis. Sei $S = \sqrt{|T|}$, dann ist S positiv selbstadjungiert und

$$\sum_j \left\langle |T| e_j, e_j \right\rangle = \sum_j \left\langle S e_j, S e_j \right\rangle$$

ist nach Lemma 5.3.1 nicht von der Wahl der ONB abhängig. □

Definition 5.4.2. Sei T ein kompakter Operator. Die Eigenwerte des Operators $|T|$ werden die **singulären Werte** von T genannt. Man schreibt sie in der Form $s_1 = s_1(T) \geq s_2(T) \geq \dots$, wobei jeder Wert nach seiner Vielfachheit wiederholt wird. Es gilt $\|T\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)$. Es folgt

$$T \text{ Spurklasse} \quad \Leftrightarrow \quad (s_j) \in \ell^1(\mathbb{N}).$$

Satz 5.4.3. (a) *Für einen beschränkten Operator T gilt $\|T\|_2 = \|T^*\|_2$ und $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$.*

(b) *Ist T von Spurklasse und S stetig, so sind die Normen $\|ST\|_1$, $\|TS\|_1$ beide $\leq \|S\| \, \|T\|_1$.*

Insbesondere bildet der Raum der Spurklasse-Operatoren ein Ideal in der Algebra $\mathcal{B}(H)$ der stetigen Operatoren auf H.

(c) *für jeden beschränkten Operator T auf einem Hilbert-Raum H gilt*

$$\|T\|_1 \;=\; \inf_{(e_j)} \sum_j \left\| T e_j \right\|,$$

wobei das Infimum über alle ONB von H erstreckt wird.

Insbesondere ist ein beschränkter Operator T genau dann Spurklasse, wenn es eine ONB (e_j) gibt mit

$$\sum_j \left\| T e_j \right\| \;<\; \infty.$$

(d) *T ist genau dann Spurklasse, wenn es zwei Hilbert-Schmidt Operatoren S_1, S_2 gibt so dass $T = S_1 S_2$.*

(e) *Für jeden Operator T auf H gilt*

$$\|T\| \leq \|T\|_2 \leq \|T\|_1 \, .$$

Beweis. (a) Schreibe $T = U|T|$ mit einer Isometrie $U : \overline{\mathrm{Bild}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Bild}(T)}$. Setze U auf ganz H fort durch $U(v + w) = U(v)$, wenn $v \in \overline{\mathrm{Bild}(T)}$ und $w \in \mathrm{Bild}(T)^\perp$. Dann ist $T^* = |T| U^*$. Sei dann (e_i) eine ONB von $\overline{\mathrm{Bild}(T)}$ und (f_j) eine von $\mathrm{Bild}(T)^\perp = \ker(T^*)$, dann ist

$$\|T^*\|_2^2 = \sum_i \|T^* e_i\|^2 + \sum_j \left\| T^* f_j \right\|^2 = \sum_i \| \, |T| U^* e_i \|^2$$

Nun ist $(U^* e_i)$ eine ONB von $\mathrm{Bild}(|T|)$ und daher ist dies gleich $\| \, |T| \, \|_2 = \|T\|_2$. Fuer die Spur-Norm beachte dass UU^* die Projektion auf Bild($|T|$) ist. Aus $TT^* = U|T|^2U^*$ folgt dann $|T^*| = U|T|U^*$ und also

$$\|T^*\|_1 = \sum_i \langle |T^*|e_i, e_i\rangle + \sum_i \langle |T|U^*e_i, e_i\rangle = \|T\|_1 .$$

(b) Sei T ein kompakter Operator. Da die singulären Werte s_j die Eigenwerte des Operators $|T|$ sind und da stets $\|Tv\| = \||T|v\|$, gilt $s_1(T) = \|T\|$ und

$$s_{j+1}(T) = \inf_{v_1,\dots,v_j \in H} \sup\{\|Tw\| : w \perp v_1, \dots, v_j,\ \|w\| = 1\}.$$

Hieraus folgt sofort, dass für jeden beschränkten Operator S auf H gilt $s_j(ST) \le \|S\|\, s_j(T)$ und damit folgt die Ungleichung $\|ST\|_1 \le \|S\|\,\|T\|_1$ Die Ungleichung $\|TS\|_1 \le \|S\|\,\|T\|_1$ aus $\|T\| = \|T^*\|$ und $\|T\|_1 = \|T^*\|_1$.

(c) Sei (e_j) eine beliebige ONB. Dann gilt

$$\|T\|_1 = \sum_j \left\langle |T|e_j, e_j \right\rangle \le \sum_j \left\| |T|e_j \right\| = \sum_j \left\| Te_j \right\| .$$

Ist $\sum_j \left\|Te_j\right\| < \infty$, so folgt, dass T Spurklasse ist. Ausserdem zeigt diese Abschätzung "$\le$" in der verlangten Gleichheit. Für "$\ge$" können wir annehmen, dass T von Spurklasse ist. Ist (e_j) eine ONB bestehend aus Eigenvektoren von $|T|$, dann gilt $\|T\|_1 = \sum_j \left\|Te_j\right\|$ und damit folgt die Gleichheit.

(d) sei T Spurklasse und sei $T = U|T|$ die Polarzerlegung von T. Nach dem Spektralsatz ist das Bild des Operators $S_2 = \sqrt{|T|}$ gleich dem Bild von $|T|$ und deshalb können wir den Operator $S_1 = U\sqrt{|T|}$ definieren. Die Operatoren S_1 und S_2 sind Hilbert-Schmidt Operatoren und es gilt $T = S_1S_2$.

Für die umgekehrte Richtung müssen wir zeigen, dass für je zwei Hilbert-Schmidt-Operatoren S und T der Operator TS von Spurklasse ist. Nun hat S^* dieselben singulären Werte und es folgt, dass S^*S ein Spurklasse Operator ist. Wir betrachten die sesquilineare Abbildung $b : \mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ gegeben durch

$$b(S,T) = T^*S.$$

Nach der Polarisierungsidentität aus Korollar 1.5.9 gilt

$$b(S,T) = \frac{1}{4}\left[D(S+T) - D(S-T) + iD(S+iT) - iD(S-iT)\right],$$

wobei $D(S) = S^*S$ ist. Die rechte Seite besteht nur aus Spurklasse-Operatoren, also ist die linke Seite, also T^*S ebenfalls Spurklasse. Ersetze nun T durch T^*, so folgt (d).

(e) Die erste Abschätzung kommt schon in Satz 5.3.3 vor und die zweite ist die Abschätzung $\|.\|_2 \le \|.\|_1$ zwischen der ℓ^2 und der ℓ^1-Norm. □

Bemerkung 5.4.4. Die Größe $\sum_j \left\|Te_j\right\|$ hängt durchaus von der Wahl der ONB ab. In der Tat laesst sich zeigen: Ist H unendlich-dimensional und gilt $\sum_j \left\|Te_j\right\| < \infty$ für jede ONB, dann ist $T = 0$ (Übungsaufgabe).

Satz 5.4.5. *Sei T ein Spurklasse-Operator.*

(a) *Die* **Spur**

$$\operatorname{tr}(T) := \sum_j \left\langle Te_j, e_j \right\rangle$$

hängt nicht von der Wahl der ONB (e_j) ab. Es gilt $|\operatorname{tr}(T)| \leq \|T\|_1$.

(b) *Ist T ausserdem normal, dann gilt*

$$\operatorname{tr}(T) = \sum_n \lambda_n \dim \operatorname{Eig}(T, \lambda_n),$$

wobei die Summe über die nichtverschwindenden Eigenwerte λ_n läuft.

(c) *Es gilt $\operatorname{tr}(T^*) = \overline{\operatorname{tr}(T)}$ und*

$$\|T\|_1 = \sup_{\substack{A \in \mathcal{B}(H) \\ \|A\|_{\mathrm{op}}=1}} |\operatorname{tr}(AT)|.$$

(d) *Die Menge der Spurklassen-Operatoren ist ein Untervektorraum von $\mathcal{B}(H)$ und $\|.\|_1$ ist eine Norm.*

(e) *Ist S ein beschraenkter Operator, so gilt*

$$\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}(TS).$$

Beweis. (a) Wir wählen zwei Hilbert-Schmidt Operatoren R und S mit $T = RS$. Dann ist

$$\sum_i \langle Te_i, e_i \rangle = \sum_i \langle Re_i, S^* e_i \rangle .$$

Dies ist gerade das Hilbert-Schmidt Skalarprodukt $\langle R, S \rangle_2$ und hängt nach Proposition 5.3.3 nicht von der ONB ab. Die zweite Aussage folgt aus der Definition.

(b) Für die zweite Aussage wähle eine ONB, die aus Eigenvektoren besteht.

(c) Es gilt

$$\operatorname{tr}(T^*) = \sum_j \left\langle T^* e_j, e_j \right\rangle = \sum_j \left\langle e_j, Te_j \right\rangle = \sum_j \overline{\left\langle Te_j, e_j \right\rangle} = \overline{\operatorname{tr}(T)}.$$

Weiter ist

$$\|T\|_1 = \operatorname{tr}(|T|) = |\operatorname{tr}(U^* T)| \leq \sup_{\substack{A \in \mathcal{B}(H) \\ \|A\|_{\mathrm{op}}=1}} |\operatorname{tr}(AT)| \leq \sup_{\substack{A \in \mathcal{B}(H) \\ \|A\|_{\mathrm{op}}=1}} \|AT\|_1 \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|T\|_1 = \|T\|_1 ,$$

so dass ueberall Gleichheit folgt.

(d) Der einzig kitzelige Teil ist die Dreiecksungleichung. Seien $A \in \mathcal{B}(H)$ und $S, T \in \mathcal{B}_1$. Dann sind AS

und AT von Spurklasse und es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AS) + \operatorname{tr}(AT) &= \sum_i \langle ASe_i, e_i\rangle + \sum_i \langle ATe_i, e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle ASe_i, e_i\rangle + \langle ATe_i, e_i\rangle \\ &= \sum_i \langle A(S+T)e_i, e_i\rangle = \operatorname{tr}(A(S+T)).\end{aligned}$$

Womit wir auch gleichzeitig die absolute Konvergenz der letzten Summe und damit $S + T \in \mathcal{B}_1$ gezeigt haben.

Nach Teil (c) gilt

$$\begin{aligned}\|S+T\|_1 &= \sup_{\substack{A\in\mathcal{B}(H)\\ \|A\|_{\mathrm{op}}=1}} |\operatorname{tr}(AS+AT)| \\ &\le \sup_{\substack{A\in\mathcal{B}(H)\\ \|A\|_{\mathrm{op}}=1}} |\operatorname{tr}(AS)| + |\operatorname{tr}(AT)| \\ &\le \sup_{\substack{A\in\mathcal{B}(H)\\ \|A\|_{\mathrm{op}}=1}} |\operatorname{tr}(AS)| + \sup_{\substack{B\in\mathcal{B}(H)\\ \|B\|_{\mathrm{op}}=1}} |\operatorname{tr}(BT)| = \|S\|_1 + \|T\|_1 .\end{aligned}$$

(e) Sind S, T beide selbstadjungiert, dann ist $\operatorname{tr}(ST) = \operatorname{tr}((ST)^*) = \operatorname{tr}(TS)$. Im allgemeinen schreibe $S = A + iB$ und $T = C + iD$ mit selbstadjungierten Operatoren A, B, C, D. Wegen $C = \frac{1}{2}(T + T^*)$ sind auch C und D von Spurklasse. Daher ist

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(ST) &= \operatorname{tr}\Big((A+iB)(C+iD)\Big) \\ &= \operatorname{tr}(AC) + i\operatorname{tr}(BC) + i\operatorname{tr}(AD) - \operatorname{tr}(BD) \\ &= \operatorname{tr}(CA) + i\operatorname{tr}(CB) + i\operatorname{tr}(DA) - \operatorname{tr}(DB) \\ &= \operatorname{tr}\Big((C+iD)(A+iB)\Big) = \operatorname{tr}(TS).\end{aligned}$$ □

Satz 5.4.6. *Die Paarung $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{K} \to \mathbb{C}$,*

$$(T, K) \mapsto \operatorname{tr}(TK)$$

induziert einen isometrischen Isomorphismus $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{K}'$. Insbesondere ist $\mathcal{B}_1$ vollstaendig, d.h., ein Banach-Raum.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\alpha : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{K}'$ gegeben durch $S \mapsto \alpha_S$ mit

$$\alpha_S(T) = \operatorname{tr}(ST).$$

Es gilt $|\alpha_S(T)| \le \|S\|_1 \; \|T\|_{\mathrm{op}}$, also $\|\alpha_S\|_{\mathrm{op}} \le \|S\|_1$. Fuer $T = S^*$ gilt

$$|\alpha_S(S^*)| = \mathrm{tr}(SS^*) = \mathrm{tr}(|S|^2) = \left\|S^2\right\|_1 \ge \|S\|_1 \, \|S\|_{\mathrm{op}} \,. = \|S^*\|_1 \, \|S\|_{\mathrm{op}} \,.$$

Also ist α eine Isometrie. Fuer die Surjektivitaet sei $\Lambda \in \mathcal{K}'$ gegeben. Die Einschraenkung von Λ auf den Hilbert-Raum $\mathcal{B}_2$ ist ebenfalls stetig, also gibt es ein $T \in \mathcal{B}_2$ mit

$$\Lambda(S) = \langle S, T\rangle_2 = \mathrm{tr}(ST^*) = \alpha_{T^*}(S).$$

Da $\mathcal{B}_2$ in der Normtopologie dicht in $\mathcal{K}$ liegt, sind die beiden Funktionale auch auf $\mathcal{K}$ gleich. □

Satz 5.4.7. *Sei $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_1(H)$ die Menge der Spurklasse-Operatoren auf einem gegebenen Hilbert-Raum H und $\mathcal{K}$ die Menge der kompakten Operatoren, dann sind $\mathcal{K}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$ Ideale in der Algebra $\mathcal{B}(H)$. Es gilt $\mathcal{B}_2^2 = \mathcal{B}_1$ und*

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{K}.$$

Die Einbettungen der Banach-Raeume $\mathcal{B}_1 \hookrightarrow \mathcal{B}_2$ und $\mathcal{B}_2 \hookrightarrow \mathcal{K}$ sind stetig.

Beweis. Dieser Satz fasst nur einige Ergebnisse dieses Abschnitts zusammen. □

Bemerkung 5.4.8. Ist T ein Spurklasse-Operator und sind λ_n seine Eigenwerte $\neq 0$, gezählt nach algebraischer Vielfachheit. Es ist leicht zu sehen, dass die Summe $\sum_n \lambda_n$ absolut konvergiert. Weniger leicht zu sehen ist, dass diese Summe gegen die Spur von T konvergiert. It T normal, so haben wir diese Aussage gezeigt. Sie ist allerdings immer richtig, was als der **Satz von Lidskii** bekannt ist. Man hat dann also

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_n \lambda_n.$$

Konvergiert umgekehrt für einen kompakten Operator T die Summe der Eigenwerte absolut, so braucht T deshalb noch nicht Spurklasse zu sein. Ein Gegenbeispiel ist der Operator $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} Te_{2n-1} &= \frac{1}{n} e_{2n}, \\ Te_{2n} &= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt $T^2 = 0$, also ist Null der einzige Eigenwert. Die Eigenwerte von T^*T sind $1/n^2$, damit sind die kritischen Werte $1/n$, also ist T nicht Spurklasse.

* * *

6 Lokalkonvexe Vektorraeume

6.1 Netze

Definition 6.1.1. Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heisst **gerichtet**, falls je zwei Elemente eine obere Schranke haben, falls es also zu je zwei $x, y \in I$ ein $z \in I$ gibt, so dass $x \leq z$ und $y \leq z$ gilt. Ist I gerichtet, so hat jede endliche Teilmenge eine obere Schranke, was man leicht durch eine Induktion einsieht.

Beispiele 6.1.2.

- Die natürlichen Zahlen sind mit der "kleiner-gleich"-Relation gerichtet.
- Ist X eine Menge, so ist die Menge $\mathcal{E}$ aller endlichen Teilmengen mit der Inklusion gerichtet, denn für zwei endliche Mengen $E, F \subset X$ ist $E \cup F$ eine obere Schranke in $\mathcal{E}$.
- Sei X ein topologischer Raum und sei $x \in X$ ein Punkt. Die Menge $\mathcal{U}_x$ aller Umgebungen von x ist mit der umgekehrten Inklusion gerichtet, denn für $U, V \in \mathcal{U}_x$ ist $U \cap V$ eine obere Schranke. Dies ist die für die Topologie wichtigste gerichtete Menge.

Definition 6.1.3. Ein **Netz** in einem topologischen Raum X ist eine Abbildung

$$\alpha : I \to X,$$

wobei I eine gerichtete Menge ist. Man schreibt die Bilder als α_i, $i \in I$.

Beispiel 6.1.4. Jede Folge ist ein Netz, wobei man $\mathbb{N}$ mit der natürlichen "kleiner-gleich"-Relation versieht.

Definition 6.1.5. Man sagt, ein Netz α **konvergiert** gegen einen Punkt $x \in X$, falls es zu jeder Umgebung U von x einen Index $i_0 \in I$ gibt so dass

$$i \geq i_0 \;\Rightarrow\; \alpha_i \in U.$$

In dem Fall einer Folge, also $I = \mathbb{N}$, stimmt dies mit der Definition der Konvergenz einer Folge überein.

A priori kann ein Netz gegen mehrere Punkte konvergieren. Den Extremfall stellt die triviale Topologie dar, in der jedes Netz gegen jeden Punkt konvergiert. Die Eindeutigkeit der Limiten ist äquivalent zur Hausdorff-Eigenschaft.

Satz 6.1.6. *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn Limiten eindeutig sind, d.h., wenn jedes Netz höchstens einen Grenzwert hat.*

Beweis. Sei X ein Hausdorff-Raum und sei (x_i) ein Netz in X, das sowohl gegen $x \in X$ als auch gegen $y \in X$ konvergiert. Es ist zu zeigen, dass $x = y$ ist. *Angenommen*, sie sind verschieden. Wegen der

Hausdorff-Eigenschaft gibt es offene Mengen $U \ni x$ und $V \ni y$ so dass $U \cap V = \emptyset$. Da (x_i) gegen x und y konvergiert, gibt es einen Index i so dass $x_i \in U$ und $x_i \in V$, ein Widerspruch! Also ist der Limes eines Netzes in der Tat eindeutig bestimmt.

Für die Rückrichtung sei ein topologischer Raum X gegeben, in dem alle Limiten eindeutig sind. Es ist zu zeigen, dass X ein Hausdorff-Raum ist. Seien also x, y in X mit der Eigenschaft, dass je zwei Umgebungen U von x und V von y einen nichtleeren Schnitt haben. Es ist zu zeigen, dass $x = y$ gilt. Sei S die Menge aller Paare (U, V) so dass U eine offene Umgebung von x ist und V eine von y. Die Menge S wird partiell geordnet durch umgekehrte Inklusion, d.h.,

$$(U, V) \leq (U', V') \quad \Leftrightarrow \quad U \supset U' \text{ und } V \supset V'.$$

Die Menge S ist gerichtet, da der Schnitt zweier Umgebungen wieder eine Umgebung ist. Für jedes $(U, V) \in S$ wähle ein Element z_{UV} in $U \cap V$. Dann ist z_{UV} ein Netz mit Indexmenge S. Da z_{UV} sowohl in U als auch in V liegt, konvergiert dieses Netz gegen x und gegen y. Wegen der Eindeutigkeit der Limiten ist $x = y$. □

Definition 6.1.7. Eine Abbildung $\phi : J \to I$ zwischen zwei gerichteten Mengen heisst **streng cofinal**, falls es zu jedem $i_0 \in I$ ein $j_0 \in J$ gibt, so dass für jedes $j \geq j_0$ gilt $\phi(j) \geq i_0$. Das bedeutet, dass die Abbildung ϕ nicht monoton zu sein braucht, sie kann vor und zurückspringen, aber sie soll "im Wesentlichen" monoton sein.

Definition 6.1.8. Sei $\alpha : I \to X$ ein Netz. Ein **Teilnetz** ist ein Netz $\beta : J \to X$ zusammen mit einer Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\beta"'] & I \arrow[d, "\alpha"] \\ & X \end{tikzcd}$$

so dass die Abbildung ϕ streng cofinal ist.

Mit anderen Worten, Teilnetze werden gegeben durch streng cofinale Abbildungen in die Indexmenge I.

Konvergiert ein Netz α gegen $x \in X$, dann konvergiert jedes Teilnetz ebenfalls gegen $x \in X$.

Satz 6.1.9. *Sei X ein topologischer Raum und sei $A \subset X$. Der Abschluss $\overline{A}$ ist gleich der Menge aller Limiten von Netzen in A.*

Mit anderen Worten, ein Punkt $x \in X$ liegt genau dann in $\overline{A}$, wenn es ein Netz $(\alpha_i)_{i\in I}$ gibt mit $\alpha_i \in A$, für alle $i \in I$, welches in X gegen x konvergiert.

Beweis. Der Abschluss $\overline{A}$ ist die Menge aller $x \in X$ so dass $A \cap U \neq \emptyset$ für jede Umgebung von x gilt. Sei also $x \in \overline{A}$ und U eine Umgebung von x. Dann ist $A \cap U$ nichtleer. Wähle ein Element α_U in $A \cap U$. Sei I die Menge aller Umgebungen U von x. Die Menge I sei versehen mit der partiellen Ordnung der umgekehrten Inklusion

$$U \le U' \Leftrightarrow U \supset U'.$$

Dann ist der Schnitt zweier Umgebungen eine obere Schranke für beide, also ist die Menge I gerichtet. Das Netz $(\alpha_U)_{U\in I}$ konvergiert nach Konstruktion gegen x.

Für die andere Richtung sei $x \in X$ und $\alpha_i \in A$, $i \in I$ ein Netz, das gegen x konvergiert. Sei U eine Umgebung von x. Dann existiert ein $i \in I$ mit $\alpha_i \in U$, also ist $U \cap A \neq \emptyset$. Da U beliebig ist, folgt $x \in \overline{A}$. □

Satz 6.1.10. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jedes Netz (x_j) in X, das konvergiert, das Bildnetz $f(x_j)$ ebenfalls konvergiert. In diesem Falle gilt: konvergiert x_j gegen x, so konvergiert $f(x_j)$ gegen $f(x)$.*

Beweis. Der folgende Beweis ist fast wörtlich derselbe wie für Folgen in $\mathbb{R}$. Sei f stetig und sei $(x_i)_{i\in I}$ ein gegen $x \in X$ konvergentes Netz. Es ist zu zeigen, dass $f(x_i) \to f(x)$. Sei hierzu U eine offene Umgebung von $f(x)$, dann ist $V = f^{-1}(U)$ eine offene Umgebung von x. Daher existiert ein i_0 so dass $x_i \in V$ für jedes $i \ge i_0$, also $f(x_i) \in U$ für jedes $i \ge i_0$, also konvergiert $f(x_i)$ gegen $f(x)$.

Für die umgekehrte Richtung nimm an, dass f die Limes-Bedingung erfüllt. Sei $A \subset Y$ abgeschlossen und sei $B \subset X$ das Urbild zu A. Es ist zu zeigen, dass B abgeschlossen ist. Sei hierzu b_i ein Netz in B, konvergent gegen $x \in X$. Dann konvergiert das Netz $f(x_i) \in A$ gegen $f(x)$. Da A abgeschlossen ist, folgt $f(x) \in A$, also $x \in f^{-1}(A) = B$, damit ist B abgeschlossen. □

Satz 6.1.11. *Ein topologischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz in X ein konvergentes Teilnetz hat.*

Beweis. Analysis-Buch. □

* * *

6.2 Topologische Vektorraeume

Definition 6.2.1. Ein **topologischer Vektorraum** ueber $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum E mit einer Hausdorff-Topologie so dass die Strukturabbildungen

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times E & \to & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

stetig sind.

Beispiele 6.2.2.
- Jeder normierte Raum $(E, \|.\|)$ ist ein topologischer Vektorraum, wobei die offenen Mengen genau die Vereinigungen von offenen Bällen
$$B_r(x) = \left\{ y \in E : \left\| x - y \right\| < r \right\}$$
mit $x \in E$ und $r > 0$ sind.
- Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Raum aller glatten Funktionen f, so dass fuer alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $x^m f^{(n)}(x)$ beschraenkt ist.

  Dieser wird der **Schwartz-Raum** genannt. Er ist ein topologischer Vektorraum, wobei die Topologie von den offenen Bällen
$$B_{r,m,n}(f) = \{ g \in \mathcal{S} : \sigma_{m,n}(f - g) < r \}$$
mit $f \in \mathcal{S}$, $r > 0$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ erzeugt wird. Hierbei ist
$$\sigma_{m,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)|.$$

Definition 6.2.3. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ ist ein **Isomorphismus topologischer Vektorraeume**, falls T bijektiv und bistetig ist, d.h., T und T^{-1} sind beide stetig.

Bemerkung 6.2.4. Man kann zeigen, dass es auf $\mathbb{C}^n$ genau eine Topologie gibt, die diesen Raum zu einem topologischen Vektorraum macht. Damit gibt es auf jedem Vektorraum E eine feinste Topologie, die E zu einem topologischen Vektorraum macht, das ist die von allen linearen Abbildungen $\mathbb{C}^n \to E$ induzierte Topologie. (Uebungsaufgabe)

Proposition 6.2.5. *Ist E ein topologischer Vektorraum und sind $v \in E$, sowie $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, dann sind die Abbildungen*
$$T_v : x \mapsto x + v, \qquad M_\lambda : x \mapsto \lambda x$$
Homoeomorphismen $E \to E$.

Beweis. Zunaechst beachte, dass fuer zwei topologische Raeume X, Y und $y_0 \in Y$ die Abbildung
$$f : X \to X \times Y, \qquad x \mapsto (x, y_0)$$
stetig ist, da die Koordinaten $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = y_0$ stetig sind.

Die Abbildung T_v ist stetig, denn sie ist die Verknuepfung der stetigen Abbildungen $E \to E \times E$, $x \mapsto (x, v)$ und $E \times E \to E$, $(y, z) \mapsto y + z$.

Die Abbildung M_λ ist die Verknuepfung $x \mapsto (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ und daher stetig.

Die Umkehrabbildungen $T_v^{-1} = T_{-v}$ und $M_\lambda^{-1} = M_{\lambda^{-1}}$ sind dann ebenfalls stetig. □

Definition 6.2.6. Ein topologischer Vektorraum E heisst **lokalkonvex**, falls die Null (und damit jeder Vektor) eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt.

Das heisst also, dass jede Umgebung der Null eine konvexe Umgebung enthaelt.

Beispiele 6.2.7.

(a) Jeder normierte Raum $(E, \|.\|)$ ist lokalkonvex, da die offenen Baelle $B_r = B_r(o)$, $r > 0$ konvex sind, denn sind $x, y \in B_r(0)$ und $t \in [0, 1]$, dann ist

$$\left\|(1-t)x + ty\right\| \leq (1-t)\|x\| + t\left\|y\right\| < (1-t)r + tr = r,$$

so dass $(1-t)x + ty$ ebenfalls in B_r liegt.

(b) Sei $0 < p < 1$ und $E = L^p([0, 1])$. Wir behaupten, dass die Vorschrift

$$d(f, g) := \int_{[0,1]} |f(x) - g(x)|^p \, dx$$

eine Metrik definiert und dass diese Metrik E zu einem topologischen Vektorraum macht, der nicht lokal-konvex ist.

Beweis. Zunaechst zur Metrik-Eigenschaft: Beachte, dass die Funktion $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $\phi(x) = x^p$ konkav ist, dass also gilt

$$\phi\Big((1-t)x + ty\Big) \geq (1-t)\phi(x) + t\phi(y).$$

Man beachte, dass genau hier die Tatsache $p < 1$ zum Tragen kommt!

Setzt man nun $x = 0$ und $y = a + b$ mit $a, b > 0$, sowie $t = \frac{a}{a+b}$ ein, so folgt

$$\phi(a) = \phi((1-t)y + tx) \geq (1-t)\phi(y) + t\phi(y) = \frac{a}{a+b}\phi(a+b)$$

und ebenso $\phi(b) \geq \frac{b}{a+b}\phi(a+b)$. Addiert man beide Ungleichungen, erhaelt man

$$\phi(a+b) \leq \phi(a) + \phi(b)$$

und damit

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)|^p &= \phi\Big(f(x) - g(x)\Big) \\
&= \phi\Big(g(x) - h(x) + h(x) - g(x)\Big) \\
&\leq \phi\Big(g(x) - h(x)\Big) + \phi\Big(h(x) - g(x)\Big) \\
&= |g(x) - h(x)|^p + |h(x) - g(x)|^p.
\end{aligned}$$

Integriert man ueber $[0, 1]$, folgt die Dreiecksungleichung. Die Definitheit und Symmetrie sind klar, so dass d ein Metrik ist. Ferner gilt fuer $f, g, h \in E$ dass

$$d(f + g, f + h) = d(g, h),$$

sowie

$$d(\lambda f, \lambda g) = |\lambda|^p d(f, g), \qquad d(\lambda f, \mu f) = |\lambda - \mu|^p \, d(0, f)$$

fuer $\lambda \in \mathbb{C}$. Fuer die Stetigkeit der Addition seien $f_i \to f$ und $g_i \to g$ konvergente Netze. Dann folgt

$$\begin{aligned} d(f_i + g_i, f + g) &\le d(f_i + g_i, f_i + g) + d(f_i + g, f + g) \\ &= d(g_i, g) + d(f_i, f) \to 0, \end{aligned}$$

so dass die Addition stetig ist. Seien ferner $\lambda_i \to \lambda$ und $f_i \to f$ konvergente Netze in $\mathbb{C}$ bzw E. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\lambda_i f_i, \lambda f) &\le d(\lambda_i f_i, \lambda_i f) + d(\lambda_i f, \lambda f) \\ &= |\lambda_i|^p \, d(f_i, f) + |\lambda_i - \lambda|^p \, d(0, f), \end{aligned}$$

was gegen Null geht fuer $i \to \infty$. Insgesamt folgt, dass E ein topologischer Vektorraum ist.

Es bleibt zu zeigen, dass E nicht lokalkonvex ist. Fuer gegebenes $r > 0$ sei

$$B_r = B_r(0) = \left\{ f \in E : d(0, f) < r \right\}$$

der r-Ball um Null. **Angenommen**, E ist lokalkonvex. Dann muss jeder Ball B_r eine konvexe Nullumgebung K enthalten. Diese muss dann wiederum einen Ball B_ε um Null enthalten, da die Baelle die Topologie erzeugen. Wir haben dann also

$$B_\varepsilon \subset K \subset B_r.$$

Wir wollen zeigen, dass K beliebig grosse Elemente enthaelt, was der Aussage $K \subset B_r$ widerspricht.

Fuer $a < b$ in $[0, 1]$ und $\lambda > 0$ gilt

$$d\Big(0, \lambda \, \mathbf{1}_{[a,b]}\Big) = \int_a^b |\lambda|^p \, dx = |\lambda|^p (b - a).$$

Das heisst also, die Funktion $f_{a,b} = \left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{[a,b]} = \lambda_{a,b} \mathbf{1}_{[a,b]}$ liegt in B_ε. Sei $T > 0$. Wir zeigen, dass eine konvexe Menge K, die fuer alle $a < b$ die Funktion $T f_{a,b}$ enthaelt, schon $Tq\, f_{a,b}$ fuer beliebig grosse $T > 0$ enthaelt, wobei $q = \frac{1 + 2^{1 + \frac{1}{p}}}{4} > 1$.

Seien also $a < b$ in $[0, 1]$ gegeben, sei $\lambda = \lambda_{a,b}$ und sei $m = \frac{a+b}{2}$ der Mittelpunkt des Intervalls. Dann enthaelt K auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big(T f_{a,b} + T f_{a,m}\Big) &= \frac{T}{2}\left(\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{\varepsilon}{2(m-a)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\mathbf{1}_{a,m} + \frac{T}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2(m-a)}\right)^{\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{m,b} \\ &= \frac{T}{2}\left(\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}} + 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}}\right)\mathbf{1}_{a,m} + \frac{T}{2} 2^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)^{\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{m,b} \\ &= \frac{T}{2}\left(\lambda + 2^{\frac{1}{p}}\lambda\right)\mathbf{1}_{a,m} + \frac{T}{2} 2^{\frac{1}{p}} \lambda \mathbf{1}_{m,b}. \end{aligned}$$

Analog erhaelt man, dass

$$\frac{T}{2} 2^{\frac{1}{p}} \lambda \mathbf{1}_{a,m} + \frac{T}{2}\left(\lambda + 2^{\frac{1}{p}}\lambda\right)\mathbf{1}_{m,b}$$

in K liegt. Das arithmetische Mittel dieser beiden ist

$$\frac{T}{4}\left(\lambda + 2^{1+\frac{1}{p}}\lambda\right)\mathbf{1}_{a,b} = T\frac{1+2^{1+\frac{1}{p}}}{4}\, f_{a,b} = qT\, f_{a,b} \in K.$$

Durch Iteration erhaelt man, dass $q^n f_{a,b}$ fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ in K liegt und damit die Behauptung. □

Definition 6.2.8. Eine **Halbnorm** auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum E ist eine Abbildung $p : E \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x \in E$, Multiplikativität
- $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ Dreiecksungleichung

Eine Halbnorm ist also wie eine Norm, bis auf die Tatsache, dass sie nicht positiv definit zu sein braucht. Man beachte, dass die Summe zweier Halbnormen ebenfalls eine Halbnorm ist.

Beispiele 6.2.9.
- Jede Norm ist eine Halbnorm.
- Die konstante Null ist eine Halbnorm.
- Ist $K \subset \mathbb{R}$ ein Kompaktum, dann ist fuer die Abbildung

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} \left| f(x) \right|$$

  eine Halbnorm auf $C(\mathbb{R})$.
- Ist p eine Halbnorm auf E und ist $F = \{x \in E : p(x) = 0\}$, dann ist F ein Untervektorraum und p induziert eine Norm auf dem Quotientenraum E/F.

Definition 6.2.10. Sei $P = (p_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Halbnormen auf dem Vektorraum E. Die durch die Familie P **induzierte Topologie** ist die Topologie auf E, die erzeugt wird von allen offenen Baellen:

$$B_{r,\alpha}(x) = \left\{ y \in E : p_\alpha(x - y) < r \right\}$$

wobei $r > 0$, $x \in E$ und $\alpha \in A$ beliebig sind.

Die Familie $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ heisst **positiv definit**, falls fuer jedes $x \in E$ gilt

$$p_\alpha(x) = 0\ \forall_{\alpha \in A} \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

Definition 6.2.11. Sei p eine Halbnorm auf E. Sei

$$B(p) = \{x \in E : p(x) < 1\}.$$

Dann gilt

- $B(p)$ is **konvex**,
- $B(p)$ ist **ausgewogen**, d.h. ist $x \in B(p)$ und ist $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$, dann ist $\alpha x \in B(p)$,

- $B(p)$ ist **absorbierend**, d.h., fuer jedes $x \in E$ gibt es ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $x \in \alpha B(p)$.

Es gilt
$$p(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B(p)\right\}.$$
Beachte, dass in einem topologischen Vektorraum jede Nullumgebung absorbierend ist.

Proposition 6.2.12. *Ist B eine Teilmenge eines Vektorraums E , die konvex, ausgewogen und absorbierend ist, dann ist*
$$p(x) := \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t}x \in B\right\}$$
eine Halbnorm auf E.

Beweis. Da B absorbierend ist, nimmt p endliche Werte an. Da B ausgewogen ist, folgt $p(\alpha x) = p(|\alpha|x)$ und damit
$$p(\alpha x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{1}{t/|\alpha|}x \in B\right\} = \inf\left\{|\alpha|t > 0 : \frac{1}{t}x \in B\right\} = |\alpha|p(x).$$

Da B konvex ist, folgt die Dreiecksungleichung. □

Lemma 6.2.13. *Sei E ein topologischer Vektorraum.*

(a) *Ist $K \subset \mathbb{C}^\times$ kompakt und $A \subset E$ abgeschlossen, dann ist KA abgeschlossen.*

(b) *Jede Nullumgebung U in E enthaelt eine ausgewogene Nullumgebung.*

Beweis. (a) Sei $x_i = k_i a_i$ ein Netz in KA, das gegen ein $z \in E$ konvergiert. Zu zeigen ist, dass $z \in KA$ liegt. Nach Uebergang zu einem Teilnetz kann man k_i als konvergent gegen ein $k \in K$ annehmen. Dann konvergiert $a_i = k_i^{-1}x_i$ gegen $a := k^{-1}z$, also liegt $a \in A$ und wir haben $z = ka \in KA$.

(b) Sei $V = \bigcap_{\theta\in\mathbb{T}} \theta U$. Das Komplement ist
$$V^c = \bigcup_{\theta\in\mathbb{T}} \theta U^c = \mathbb{T}U^c$$
und dies ist offen nach Teil (a), also ist V die gewuenschte ausgewogene offene Nullumgebung. □

Satz 6.2.14. (a) *Sei der komplexe Vektorraum E mit der Topologie einer positiv definiten Familie von Halbnormen $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ versehen. Ein Netz v_i in E konvergiert genau dann gegen $v \in E$, wenn fuer jedes $\alpha \in A$ das Netz $p_\alpha(v_i - v)$ in $\mathbb{C}$ gegen Null geht.*

(b) *Ein topologischer Vektorraum E ist genau dann lokalkonvex, wenn es eine Familie von Halbnormen gibt, die die Topologie erzeugt.*

(c) *Ist E lokalkonvex und ist (p_i) eine Familie wie in (b), dann ist jede Halbnorm p_i eine stetige Abbildung. Die Topologie eines lokalkonvexen Raums V wird von allen stetigen Halbnormen erzeugt.*

Beweis. (a) Es konvergiere $v_i \to v$. Sei $\alpha \in A$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $B_\varepsilon(v, p_\alpha)$ eine Umgebung von v, also gibt es ein $i_0 \in I$ so dass $i \geq i_0 \Rightarrow v_i \in B_\varepsilon(v, p_\alpha)$, was soviel heisst wie $p_\alpha(v_i - v) < \varepsilon$. Also konvergiert $p_\alpha(v_i - v)$ gegen Null. Fuer die Rueckrichtung laesst sich dieser Schluss umkehren.

(b) Sei E lokalkonvex. Nach Lemma 6.2.13 enthaelt jede konvexe Nullumgebung eine ausgewogene offene Nullumgebung. Zu jeder offenen konvexen ausgewogenen Nullumgebung U gibt uns Proposition 6.2.12 eine Halbnorm p_U. Es gilt dann

$$B(p_U) = U.$$

Ferner ist fuer $x \in E$ und $r > 0$,

$$B_r(x, p_U) = x + rU,$$

also ist der Ball $B_r(x, p_U)$ offen. Die von der Halbnormen p_U erzeugte Topologie liegt also in der Ursprungs-Topologie von E. Da andererseits die U eine Nullumgebungsbasis bilden, wird die Topologie von E von allen Mengen der Form $v + rU$ erzeugt.

Die Umkehrung ist klar.

(c) Sei die Topologie von E durch $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ erzeugt und sei $\alpha \in A$. Sei $x_i \to x$ ein konvergentes Netz in E, dann folgt nach der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|p_\alpha(x_i) - p_\alpha(x)| \leq p_\alpha(x_i - x) \to 0.$$

Also ist p_α stetig. Der Zusatz ist klar. □

Beispiel 6.2.15. Hier ein Beispiel fuer einen Raum, fuer den es keine abzaehlbare Familie von Halbnormen gibt. Sei $E = C_c(\mathbb{R})$. Fuer jede stetige Funktion $\phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ erhalten wir eine Halbnorm

$$\rho_\phi(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi(x)|\, |f(x)|.$$

Wir versehen $C_c(\mathbb{R})$ mit der Topologie dieser Halbnormen.

6.3 Vollstaendigkeit

Definition 6.3.1. Ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in einem topologischen Vektorraum E heisst **Cauchy-Netz**, falls es zu jeder Nullumgebung $U \subset E$ einen Index $i_0 \in I$ gibt so dass

$$i, j \geq i_0 \quad \Rightarrow \quad x_i - x_j \in U.$$

Definition 6.3.2. Ein topologischer Vektorraum E heisst **vollstaendig**, falls jedes Cauchy-Netz konvergiert.

Beispiel 6.3.3. Der Raum $\mathcal{S}$ der Schwartz-Funktionen auf $\mathbb{R}$ ist vollstaendig.

Beweis. Sei $(f_i)_{i\in I}$ ein Cauchy-Netz. Insbesondere ist (f_i) ein Cauchy-Netz in der Norm

$$\|f\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|.$$

Da der Raum der beschraenkten stetigen Funktionen vollstaendig ist, konvergiert das Netz gleichmaessig gegen eine stetige Funktion f. Da fuer jedes k die Ableitungen $f_i^{(k)}$ ebenfalls ein Cauchy-Netz bilden, konvergieren alle Ableitungen. Da der Ableitungsoperator stetig ist, konvergieren die Ableitungen des Netzes gegen die Ableitungen von f. Es folgt nun leicht, dass $f_i \to f$ in $\mathcal{S}$ gilt. □

Beispiel 6.3.4. Der Raum $C_c(\mathbb{R})$ mit der Topologie wie in Beispiel 6.2.15 ist vollstaendig. Sei hierzu $(f_i)_{i\in I}$ ein Cauchy-Netz. Das heisst, dass es zu jeder stetigen Funktion $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ ein i_0 gibt, so dass $f_i - f_j \in B(\phi) = \{g : \rho_\phi(g) < 1\}$ fuer alle $i, j \geq i_0$ gilt. Sei $C_0(\mathbb{R})$ der Raum aller stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Dieser Raum ist ein Banach-Raum mit der Supremumsnorm. Es folgt, dass (f_i) ein Cauchy-Netz in $C_0(\mathbb{R})$ ist, also konvergiert das Netz gleichmaessig gegen eine stetige Funktion f. Wir zeigen, dass f kompakten Traeger hat. **Angenommen,** dies ist nicht der Fall. Dann gibt es eine Folge (x_n) in $\mathbb{R}$ mit $|x_n| \to \infty$, so dass $f(x_n) \neq 0$ fuer jedes $n \in \mathbb{N}$. Es gibt dann eine stetige Funktion $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ so dass fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\phi(x_n) > \frac{n}{|f(x_n)|}$, also $\rho_\phi(f) = \infty$, was der Konvergenz $f_i \to f$ in der Halbnorm ρ_ϕ **widerspricht!**

* * *

6.4 Lineare Abbildungen

Satz 6.4.1.

(a) *Sei $\left(E, (p_\alpha)_{\alpha\in A}\right)$ ein Vektorraum mit einer positiv definiten Familie von Halbnormen. Eine Halbnorm $p : E \to [0,\infty)$ ist genau dann stetig, wenn es endlich viele $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ gibt, sowie eine Konstante $C > 0$, so dass $p \leq C \sum_{j=1}^n p_{\alpha_j}$ gilt.*

(b) *Seien $\left(E, (p_i)_{i\in I}\right)$ und $\left(F, (q_j)_{j\in J}\right)$ Vektorräume mit positiv definiten Familien von Halbnormen. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ ist genau dann stetig, wenn es zu jedem $j \in J$ eine endliche Teilmenge $\mathcal{E} \subset I$ gibt, sowie eine Konstante $C > 0$, so dass $q_j\left(T(x)\right) \leq C \sum_{i\in\mathcal{E}} p_i(x)$ für jeden Vektor $x \in E$ gilt.*

(c) *Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ zwischen lokalkonvexen Räumen ist genau dann stetig, wenn es zu jeder stetigen Halbnorm q auf F eine stetige Halbnorm p auf E gibt mit*

$$q\left(T(x)\right) \leq p(x) \quad \forall_{x\in E}.$$

Beweis. (a) Wie im Fall von linearen Abbildungen sieht man, dass eine Halbnorm genau dann stetig ist, wenn sie stetig in Null ist. Sei also p eine stetige Halbnorm. Dann ist der Ball $B_{1,p}(0)$ offen und da 0 in diesem Ball liegt, enthaelt er eine Menge der Form

$$B_{r_1,\alpha_1}(0) \cap \cdots \cap B_{r_n,\alpha_n}(0)$$

mit $r_j > 0$ und $\alpha_j \in A$. Sei $r > 0$ das Minimum der r_j und sei $q = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^n p_{\alpha_j}$, dann folgt

$$B_{1,q}(0) \subset B_{r,\alpha_1}(0) \cap \cdots \cap B_{r,\alpha_n}(0) \ \subset\ B_{1,p}(0).$$

Hieraus folgt $p \le q$, was zu zeigen war.

Umgekehrt gelte $p \le C\sum_{j=1}^n p_{\alpha_j}$ und sei $\varepsilon > 0$. Wir muessen zeigen, dass $B_{\varepsilon,p}(0)$ eine offene Nullumgebung enthaelt. Sei $r = \frac{\varepsilon}{Cn}$, dann folgt

$$B_{r,\alpha_1}(0) \cap \cdots \cap B_{r,\alpha_n}(0) \subset B_{\varepsilon,p}(0).$$

Damit ist p stetig.

(b) Ist T stetig, dann ist die Halbnorm $x \mapsto q_j(T(x))$ stetig und die Aussage folgt aus (a). Fuer die Umkehrung nimm an, dass die Abschaetzung gilt. Wir muessen zeigen, dass es zu jeder Nullumgebung $U \subset F$ eine Nullumebung $V \subset E$ gibt mit $T(V) \subset U$. Wir koennen annehmen, dass U von der Form

$$B_{r,q_1}(0) \cap \cdots \cap B_{r,q_n}(0)$$

ist. Indem wir die Abschaetzung fuer jedes q_j anwenden und dann addieren, finden wir $p_1, \dots, p_m$ in $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$, und ein $C > 0$, so dass

$$q_1 \circ T + \cdots + q_n \circ T \le C\sum_{j=1}^m p_j.$$

Dann wird aber die Nullumgebung

$$V = B_{r/nC,p_1} \cap \cdots \cap B_{r/nC,p_m}$$

von T nach U abgebildet.

(c) folgt aus (a) und (b), da $C\sum_{i\in E} p_i$ wieder eine stetige Halbnorm ist. □

Satz 6.4.2 (Hahn-Banach für lokalkonvexe Räume). *Sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $D \subset E$ ein Teilraum.*

(a) *Zu jeder stetigen Halbnorm p auf D gibt es eine stetige Halbnorm q auf E, so dass $p \le q$ auf E gilt.*

(b) *Jedes stetige lineare Funktional $\alpha : D \to \mathbb{C}$ besitzt eine stetige lineare Fortsetzung nach E.*

Beweis. (a) Sei B der offene p-Einheitsball in D. Dann existiert eine offene Menge $U \subset E$ mit $U \cap D = B$. Diese Menge U enthaelt eine konvexe, ausgewogene Nullumgebung V in E. Sei q die zugehoerige Halbnorm mit Einheitsball V. Wegen $B \subset V$ folgt $p \le q$.

(b) Nach Satz 6.4.1 gibt es eine stetige Halbnorm p auf D mit

$$|\alpha(x)| \leq p(x)$$

für alle $x \in D$. Nach Teil (a) gibt es eine stetige Halbnorm q auf E, die p dominiert. Nach dem klassischen Hahn-Banach-Satz folgt, dass α eine Fortsetzung $\tilde{\alpha}$ nach E hat mit $|\tilde{\alpha}(x)| \leq q(x)$ für alle $x \in E$, so dass $\tilde{\alpha}$ in der Tat stetig ist. □

* * *

6.5 Lokalkonvexe Finaltopologie

Definition 6.5.1. Sei E ein komplexer Vektorraum und sei $(\eta_i)_{i \in I}$ eine Familie von linearen Abbildungen

$$\eta_i : E_i \to E,$$

wobei jedes E_i ein lokalkonvexer Vektorraum ist. Sei P die Familie aller Halbnormen p auf E, so dass die Halbnorm $p \circ \eta_i$ fuer jedes $i \in I$ stetig ist. Die durch P induzierte Topologie ist die feinste lokalkonvexe Topologie, die alle η_i stetig macht. Wir nennen sie die von den η_i erzeugte **lokalkonvexe Finaltopologie**.

Satz 6.5.2. *Sei E mit der lokalkonvexen Finaltopologie der Familie $(\phi_i)_{i \in I}$ ausgestattet. Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ in einen lokalkonvexen Raum F ist genau dann stetig, wenn $T \circ \phi_i : E_i \to F$ fuer jedes $i \in I$ stetig ist.*

Beweis. Ist T stetig, so auch $T \circ \phi_i$. Sei umgekehrt jedes $T \circ \phi_i$ stetig. Sei P die Familie der Halbnormen p, fuer die $p \circ \phi_i$ fuer jedes i stetig ist. Sei q eine stetige Halbnorm auf F. Dann ist $q_T = q \circ T$ eine Halbnorm auf E und da $E_i \xrightarrow{\phi_i} E \xrightarrow{T} F$ stetig ist, ist $q_T \circ \phi_i$ stetig, also $q_T \in P$. Es gilt dann die tautologische Abschaetzung

$$q(T(x)) \leq q_T(x)$$

und also ist T stetig. □

Proposition 6.5.3. *Die Topologie auf dem Raum $C_c(\mathbb{R})$ gegeben in Beispiel 6.2.15 ist die lokalkonvexe Finaltopologie der Einbettungen*

$$\alpha_K : C_K(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_c(\mathbb{R}),$$

wobei $K \subset \mathbb{R}$ kompakt ist und $C_K(\mathbb{R})$ die Menge aller stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezeichnet, deren Traeger in K liegt.

Beweis. Sei p eine Halbnorm auf $C_c(\mathbb{R})$, die auf allen $C_K(\mathbb{R})$ stetig ist. Nach Satz 6.4.1 gibt es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Konstante $d_N > 0$ mit

$$p(f) \leq d_N \, \|f\|_{[-N,N]}$$

fuer jedes $f \in C_{[-N,N]}(\mathbb{R})$. Sei $\phi : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $\phi(x) \geq 2d_n$ falls $x \in [n+1, -n-1] \setminus [n-1, -n+1]$. Ein gegebenes $f \in C_{[-N,N]}(\mathbb{R})$ kann man schreiben als Summe $f = f_{-N} + f_{-N+1} + \cdots + f_N$, so dass $\operatorname{supp}(f_n) \subset [n-1, n+1]$ und $|f_n| \leq |f|$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} p(f) &\leq p(f_{-N}) + \cdots + p(f_N) \\ &\leq \frac{1}{2}\left\|\phi f_{-N}\right\|_{[-N-1,-N+1]} + \cdots + \frac{1}{2}\left\|\phi f_n\right\|_{[n-1,n+1]} + \cdots + \frac{1}{2}\left\|\phi f_N\right\|_{[N-1,N+1]} \\ &\leq \left\|\phi f\right\|_{[-N,-N+1)} + \left\|\phi f\right\|_{[-N+1,-N+2)} + \cdots + \left\|\phi f\right\|_{[N-1,N)} \\ &= \left\|\phi f\right\|_{[-N,N]}. \end{aligned}$$

Damit ist p dominiert durch eine Norm wie in Beispiel 6.2.15, also stetig nach Satz 6.4.1. Damit ist jede stetige Halbnorm der Finaltopologie schon stetig in der Topologie aus Beispiel 6.2.15. Umgekehrt ist jede Halbnorm aus 6.2.15 auch stetig auf allen $C_K(\mathbb{R})$ und damit folgt die Behauptung. □

* * *

Zum Schluss noch eine Bemerkung zum Satz von Krein-Milman. Man macht sich klar, dass der Beweis des Satzes von Krein-Milman, 2.2.6 auch fuer beliebige lokalkonvexe Raeume funktioniert. Es gilt also

Satz 6.5.4 (Krein-Milman). *Sei $K \neq \emptyset$ eine konvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raums E. Dann gilt*

(a) *Jede Seite von K enthaelt einen Extremalpunkt. Insbesondere ist* $\operatorname{ext}(K) \neq \emptyset$.

(b) $K = \overline{\operatorname{conv}(\operatorname{ext}(K))}$.

Beweis. Genauso wie bei Banach-Raeumen. □

* * *

6.6 Der Fixpunktsatz von Kakutani-Markov

Definition 6.6.1. Seien E, F reelle Vektorraeume und sei $K \subset E$ konvex. Eine Abbildung $f : K \to F$ heisst **affine Abbildung**, falls

$$f(x) = Ax + b$$

fuer eine auf lineare Abbildung $A : E \to F$ und ein $b \in F$ gilt.

Proposition 6.6.2. *Eine Abbildung $f : K \to E$ wie oben ist genau dann affin, wenn f Konvexkombinationen* *respektiert, wenn also*

$$f\big((1-t)x+ty\big) = (1-t)\, f(x) + t\, f(y) \tag{$*$}$$

fuer alle $x, y \in K$ und alle $0 \le t \le 1$ gilt.

Beweis. Ist f affin, dann respektiert es Konvexkombinationen. Fuer die Rueckrichtung koennen wir K verschieben und annehmen, dass die Null in K liegt. Ersetzen wir dann $f(x)$ durch $h(x) = f(x) - f(0)$, dann gilt $(*)$ auch fuer h und wir koennen annehmen, dass $f(0) = 0$ ist. Wir haben dann zu zeigen, dass f linear ist. Wir beginnen mit $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ falls $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x, \lambda x \in K$ gilt. Ist $0 \le \lambda \le 1$, so folgt dies direkt aus $(*)$, indem man $t = 1 - \lambda$ und $y = 0$ setzt. Ist $\lambda > 1$, dann setzt man $t = \frac{1}{\lambda}$ und erhaelt

$$f\left(\frac{1}{\lambda}x\right) = \frac{1}{\lambda} f(x).$$

Ersetzt man x durch λx und multipliziert mit λ, dann folgt die Behauptung in diesem Fall. Schliesslich seien $x, y \in \frac{1}{2}K$, dann gilt

$$f(x+y) = f\left(\frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}(2y)\right) = \frac{1}{2} f(2x) + \frac{1}{2} f(2y) = f(x) + f(y).$$

Die additive Gruppe von Spann(K) wird von $\frac{1}{2}K$ erzeugt, also setzt f zu einem eindeutig bestimmten Gruppenhomomorphismus auf Spann(K) fort. Insbesondere dann auch
$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$, so dass $f(-x) = -f(x)$ und daher $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ fuer alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt und die Proposition folgt. □

Lemma 6.6.3. *Seien E, F und $f : K \to F$ affin wie in der Definition. Nun aber seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorraeume. Dann sind aequivalent*

(a) *f ist stetig.*

(b) *Fuer jede stetige Halbnorm q auf F existiert eine stetige Halbnorm p auf E, so dass*

$$q\big(f(x) - f(y)\big) \le p(x-y)$$

fuer alle $x, y \in K$ gilt.

Beweis. f ist genau dann stetig, wenn der lineare Anteil stetig ist. □

Satz 6.6.4. *Sei K eine konvexe kompakte Teilmenge eines lokalkonvexen Raums E und sei G eine abelsche Gruppe von stetigen affinen Abbildungen $K \to K$.*

Dann hat G einen gemeinsamen Fixpunkt in K.

Beweis. Sei $\mathcal{S}$ das System aller Untergruppen H von G, fuer die

$$K^H = \Big\{x \in K : g.x = x \ \forall_{g \in H}\Big\}$$

nichtleer ist. Da $\{e\} \in \mathcal{S}$, ist $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Wir ordnen $\mathcal{S}$ durch die Inklusion. Sei $\mathcal{L} \subset \mathcal{S}$ eine linear geordnete Teilmenge. Da K kompakt ist, folgt wegen der endlichen Schnitteigenschaft, dass $\bigcap_{H \in \mathcal{L}} K^H$ nichtleer ist und daher $\bigcup_{H \in L} H \in \mathcal{S}$. Nach dem Lemma von Zorn hat $\mathcal{S}$ ein maximales Element M. Wir wollen zeigen, dass $M = G$ ist. Sei also $g \in G$. Da G affin und stetig operiert, ist K^H konvex und abgeschlossen, also kompakt. Da G abelsch ist, ist K^M stabil unter G und daher kann man K durch K^M ersetzen und verlangen, dass M trivial operiert. Sei $v_0 \in K$ und fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g^j v_0.$$

Da g affin ist, gilt $g v_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g^{j+1} v_0$ und damit

$$v_n - g v_n = \frac{1}{n}\Big(g v_0 - g^{n+1} v_0\Big).$$

Ist q eine Halbnorm, dann geht

$$q(v_n - g v_n) = \frac{1}{n} q\Big(g v_0 - g^{n+1} v_0\Big) \le \frac{1}{n}\Big(q(g v_0) + q(g^{n+1} v_0)\Big) \le \frac{2}{n} \max_{k \in K} q(k)$$

gegen Null. Da K kompakt ist, gibt es ein konvergentes Teilnetz $(v_{n_i})_{i \in I}$ mit $v_{n_i} \to w$. Sei dann q eine Halbnorm und p eine Halbnorm wie in Lemma 6.6.3. Dann gilt fuer $i \in I$,

$$\begin{aligned} q(gw - w) &\le q(gw - g v_{n_i}) + q(g v_{n_i} - v_{n_i}) + q(v_{n_i} - w) \\ &\le p(v_{n_i} - w) + q(v_{n_i} - w) + q(g v_{n_i} - v_n). \end{aligned}$$

Fuer $i \to \infty$ gehen alle diese Ausdruecke gegen Null. Daher folgt $q(gW - w) = 0$ fuer jede stetige Halbnorm q und daher $gw = w$, so dass fuer die Gruppe $H = \langle M, g\rangle$ die Fixpunktmenge K^H nichtleer ist, also $H \in \mathcal{S}$ gilt. Da M maximal ist, folgt $g \in M$ und damit $M = G$. □

Anwendung: Existenz des Haar-Maßes

Definition 6.6.5. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G mit einer Topologie, derart, dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\to G, & \qquad G &\to G, \\ (x, y) &\mapsto xy, & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

stetig sind. Eine **kompakte Gruppe** ist eine topologische Gruppe, die hausdorffsch und kompakt ist.

Beispiele 6.6.6.

(a) Die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^\times, \times)$ sind topologische Gruppen.

(b) Die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit der Topologie des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist eine topologische Gruppe.

(c) Die Gruppe $O(n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine kompakte Gruppe.

(d) Sei fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Gruppe G_n gegeben. Versieh jedes G_n mit der diskreten Topologie. Dann ist

$$G = \prod_{n \in \mathbb{N}} G_n$$

mit der Produkt-Topologie eine kompakte Gruppe.

Satz 6.6.7. *Sei G eine kompakte abelsche Gruppe. Versieh G mit der Borel σ-Algebra. Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ auf G, das invariant unter Translationen ist, also*

$$\mu(xA) = \mu(A)$$

fuer alle messbaren Mengen $A \subset G$ erfuellt.

Beweis. Der Raum $C(G)$ ist ein Banach-Raum. Die Menge K der Wahrscheinlichkeitsmaße ist eine konvexe Teilmenge von $C'(G)$, die im Einheitsball liegt und abgeschlossen ist in der schwach-*-Topologie. Daher ist K kompakt. Die Gruppe G operiert auf K durch

$$g.\mu(A) = \mu(g^{-1}A).$$

Nach dem Fixpunktsatz gibt es einen Fixpunkt $\mu \in K$. □

* * *

7 Distributionen

7.1 Definition

Im Folgenden betrachten wir Distributionen auf $\mathbb{R}$. Man kann hier $\mathbb{R}$ auch durch $\mathbb{R}^n$ ersetzen, indem man partielle Differentiation benutzt.

Definition 7.1.1. Fuer ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ sei $C_K^\infty = C_K^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset K$. Wir versehen C_K^∞ mit der Familie $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von Halbnormen definiert durch

$$\rho_n(f) = \sup_{x\in K} |f^{(n)}(x)|.$$

Der Raum C_K^∞ ist ein Teilraum von C_c^∞. Wir versehen C_c^∞ mit der lokalkonvexen Finaltopologie der Einbettungen $i : C_K^\infty \to C_c^\infty$.

Definition 7.1.2. Eine **Distribution** auf $\mathbb{R}$ ist eine stetige lineare Abbildung

$$T\colon C_c^\infty \to \mathbb{C}.$$

Man nennt eine Funktion $f \in C_c^\infty$ auch eine **Testfunktion**, da sie in eine Distribution eigesetzt wird um die Distribution auf bestimmte Eigenschaften zu 'testen'.

Satz 7.1.3. *Eine lineare Abbildung $T\colon C_c^\infty \to \mathbb{C}$ ist genau dann stetig, also eine Distribution, wenn*

$$\lim_{j\to\infty} T(g_j) = T(g)$$

Fuer jede Folge (g_j) in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit der Eigenschaft, dass es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ gibt so dass $\operatorname{supp}(g_n) \subset K$ *fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt und dass jede Ableitung $\partial^n g_j \to \partial^n g$ gleichmaessig konvergiert.*

Beweis. Nach Satz 6.5.2 ist T genau dann stetig, wenn jedes $T_K : C_K^\infty \to \mathbb{C}$ stetig ist. Die Topologie von C_K^∞ ist durch eine abzaehlbare Familie von Halbnormen erzeugt, also kann man Folgen statt Netze nehmen. □

Beispiele.

- Die **Delta-Distribution**

$$\delta(f) := f(0).$$

- Der **Dirac-Kamm** ist die Distribution

$$K(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k).$$

- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist
$$f \mapsto \partial^n f(0)$$
eine Distribution.
- Das Integral
$$I(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx.$$
- Eine messbare Funktion ϕ auf $\mathbb{R}$ heisst **lokal integrierbar**, falls jeder Punkt $x \in \mathbb{R}$ eine Umgebung U besitzt, so dass $\int_U |\phi(x)|\,dx < \infty$. Eine gegebene lokal-integrierbare Funktion ϕ definiert eine Distribution I_ϕ durch die Vorschrift
$$I_\phi(f) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\phi(x)\,dx.$$

Wir bezeichnen den komplexen Vektorraum der Distributionen mit $C_c^\infty(\mathbb{R})'$. Eine Distribution T ist im Allgemeinen nicht durch eine Funktion gegeben, also kann man eigentlich nicht $T(x)$ schreiben, es hat sich aber eingebuergert, trotzdem
$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} T(x) f(x)\,dx$$
zu schreiben. So ist zum Beispiel die Distribution $T(x-a)$, $a \in \mathbb{R}$, gegeben durch
$$\int_{\mathbb{R}^n} T(x-a) f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} T(x) f(x+a)\,dx.$$
Es ist also
$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x+a)\,dx = f(a).$$

Man kann den Raum
$$L^1_{\mathrm{lok}}(\mathbb{R})$$
aller lokal-integrierbaren Funktionen (modulo des Unterraums der Nullfunktionen) als Teilraum von $\mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})'$ betrachten.

* * *

7.2 Ordnung einer Distribution

Es gilt $C_c^N(\mathbb{R}) = \bigcup_K C_K^N(\mathbb{R})$, wobei fuer ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ der Raum $C_K^N(\mathbb{R})$ die Menge aller $f \in C^N(\mathbb{R})$ bezeichnet mit $\operatorname{supp}(f) \subset K$.

Wir versehen den Raum $C_K^N(\mathbb{R})$ mit der Topologie erzeugt durch die Halbnormen $\rho_n(f) = \left\| f^{(n)} \right\|_K$ mit $n \le N$. Da auf C_K^N weniger Halbnormen ausgewertet werden, ist die Einbettung $C_K^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_K^N(\mathbb{R})$ stetig.

Definition 7.2.1. Sei T eine Distribution, dann haben wir fuer jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ die Situation:

$$\begin{tikzcd} C_K^\infty \arrow[r, "T"] \arrow[d, hook] & \mathbb{C} \\ C_K^N & \end{tikzcd}$$

Die stetige Inklusion $C_K^\infty(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_K^N(\mathbb{R})$ induziert eine groebere Topologie auf $C_K^\infty(\mathbb{R})$. Wir sagen, eine Distribution T hat **Ordnung** $\le N$, falls T fuer jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ zu einem stetigen Funktional auf $C_K^N(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann.

Die **Ordnung** einer Distribution T ist das kleinste $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit dieser Bedingung.

Beispiele 7.2.2.

- Jede Distribution T der Ordnung Null ist gegeben durch
$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x),$$
mit einem eindeutig bestimmten Radon-Maß μ (Darstellungssatz von Riesz). Man sagt auch, eine Distribution von Ordnung Null **ist** ein Radon-Maß.
- Nicht jede Distribution hat endliche Ordnung. Zum Beispiel hat
$$f \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} f^{(n)}(n)$$
die Ordnung ∞.

Lemma 7.2.3. *Eine Distribution $T \in C_c^\infty(\mathbb{R})'$ hat genau dann Ordung $\le N$, wenn*

$$\lim_{j \to \infty} T(g_j) = T(g)$$

Fuer jede Folge (g_j) in $C_c^\infty(\mathbb{R})$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, mit der Eigenschaft, dass es ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ gibt mit $\operatorname{supp}(g_j) \subset K$ *fuer jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt und dass jede Ableitung $g_j^{(n)} \to g^{(n)}$* **mit** *$n \le N$ gleichmaessig konvergiert.*

Beweis. Dies ist eine Umformulierung der Definition. □

Satz 7.2.4. *Jede Distribution hat lokal endliche Ordnung. Genauer gilt: Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen und relativ kompakt und T eine Distribution auf $\mathbb{R}$, dann hat die Einschraenkung $T|_U : C_c^\infty(U) \to \mathbb{C}$ endliche Ordnung.*

Hierbei fassen wir $C_c^\infty(U)$ als Teilraum von $C_c^\infty(\mathbb{R})$ auf (Fortsetzung durch Null).

Beweis. Sei $K \subset \mathbb{R}$ der Abschluss von U. Dann ist T stetig auf dem lokalkonvexen Raum $C_K^\infty(\mathbb{R})$ und damit gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass
$$|T(f)| \le C \sum_{n \le N} \left\| f^{(n)} \right\|_K$$

fuer jedes $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ gilt. □

* * *

7.3 Traeger einer Distribution

Definition 7.3.1. Ist $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Teilmenge, so koennen wir $C_c^\infty(U)$ als eine Teilmenge von $C_c^\infty(\mathbb{R})$ auffassen, indem wir jedes $g \in C_c^\infty(U)$ durch Null ausserhalb von U fortsetzen. Wir schreiben dann $T|_U$ fuer die Einschraenkung der Distribution T auf $C_c^\infty(U)$.

Der **Traeger** einer Distribution ist definiert als

$$\operatorname{supp}(T) = \Big\{x \in \mathbb{R} : \text{ fuer jede offene Umgebung } U \text{ gilt } T|_U \neq 0\Big\}.$$

Umgekehrt ist $x \notin \operatorname{supp}(T)$, wenn es eine offene Umgebung U gibt mit $T|_U = 0$. Hieran sieht man, dass das Komplement $\operatorname{supp}(T)^c$ offen ist, also ist $\operatorname{supp}(T)$ abgeschlossen.

Beispiel 7.3.2. Der Traeger der Dirac-Distribution δ ist die Menge $\{0\}$.

Satz 7.3.3. *Sei T eine Distribution. Dann verschwindet T auf der offenen Menge $W = \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp}(T)$.*

Beweis. Die Menge W ist eine Vereinigung von Mengen auf denen T verschwindet, also etwa $W = \bigcup_{i \in I} U_i$, wobei jedes U_i eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, auf der T verschwindet. Sei nun $(u_i)_{i \in I}$ eine **Teilung der Eins** auf W, d.h., jedes $u_i \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(u_i) \subset U_i$ und $u_j \geq 0$ so dass

$$\sum_{i \in I} u_i(x) = 1$$

fuer jedes $x \in W$ gilt, wobei die Summe **lokal-endlich** ist in dem Sinne, dass es zu jedem $x \in W$ eine offene Umgebung V gibt, auf der nur endlich viele Summmanden $\neq 0$ sind. Ein Existenzbeweis fuer eine Teilung der Eins findet sich etwa in (Deitmar: Analysis).

Lemma 7.3.4. *Fuer jedes Kompaktum $K \subset W$ ist die Menge*

$$\Big\{i \in I : u_i|_K \neq 0\Big\}$$

endlich.

Beweis. Fuer jedes $x \in K$ existiert eine offene Umgebung V_x so dass nur endlich viele u_i auf V_x ungleich Null sind. Dann ist $(V_x)_{x \in K}$ eine offene Ueberdeckung von K, also reichen endlich viele, woraus die Behauptung folgt. □

Sei nun $f \in C_c^\infty(W)$. Dann ist

$$T(f) = T\left(f \sum_{i\in I} u_i\right) = \sum_{i\in I} T(fu_i),$$

wobei der letzte Schritt dadurch gerechtfertigt wird, dass mit dem Lemma auf $K = \operatorname{supp}(f)$ angewendet folgt, dass die Summe $\sum_{i\in I} fu_i$ in der Tat endlich ist, d.h., fast alle Summanden sind Null. Da nun jedes einzelne $T(fu_i)$ gleich Null ist, folgt $T(f) = 0$ und der Satz ist bewiesen. □

Definition 7.3.5. Sei $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.dann koennen wir eine Distruibution T mit ψ multiplizieren und erhalten eine Distribution ψT die wir durch

$$(\psi T)(f) = T(\psi f)$$

definieren.

Satz 7.3.6. *Sei $T \in C_c^\infty(\mathbb{R})'$ eine Distribution.*

(a) *Ist $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp}(f) \cap \operatorname{supp}(T) = \emptyset$, dann folgt*

$$T(f) = 0.$$

(b) *Ist $\operatorname{supp}(T) = \emptyset$, dann ist $T = 0$.*

(c) *Ist $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ und ist $\psi \equiv 1$ in einer Umgebung von $\operatorname{supp}(T)$, dann ist $\psi T = T$.*

Beweis. Klar. □

* * *

7.4 Die Ableitung einer Distribution

Definition 7.4.1. Sei ϕ eine glatte Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann definiert ϕ eine Distribution $I_\phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\phi(x)\,dx$. Durch partielle Integration sieht man, dass fuer jede Testfunktion f und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$I_{\phi^{(n)}}(f) = \int_{\mathbb{R}} \phi^{(n)}(x) f(x)\,dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\, f^{(n)}(x)\,dx = (-1)^j I_\phi(f^{(n)}).$$

Dies motiviert die folgende Definition: Sei T eine Distribution und $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren die n-te **Ableitung** von T als die Distribution

$$T^{(n)}(g) := (-1)^n T(g^{(n)}).$$

Beispiele 7.4.2.

- Sei $\phi = \mathbf{1}_{[0,\infty)}$ die charakteristische Funktion des Intervalls $[0,\infty)$. Fuer $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ gilt dann
$$I'_\phi(g) = -I_\phi(g') = -\int_0^\infty g'(x)\,dx = g(0),$$
so dass $I'_\phi = \delta$ oder
$$\phi' = \delta.$$

Insbesondere bedeutet dies, dass wir fuer eine lokal integrierbare Funktion ϕ alle Ableitungen $\phi^{(n)}$ in Sinne von Distributionen definieren koennen.

Distributionen als Ableitungen

Lemma 7.4.3. *Seien $K \subset \mathbb{R}$ kompakt und $g \in L^1(K)$. Setze $g = 0$ ausserhalb von K. Fuer $x \in \mathbb{R}$ sei $\phi(x) := \int_{-\infty}^x g(t)\,dt$. Dann ist ϕ stetig und es gilt fuer jedes $f \in C_c^\infty$, dass*
$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,f(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,f'(x)\,dx.$$
Mit anderen Worten, es gilt $\phi' = g$ als Distributionen.

Beweis. Wir zerlegen g in Real- und Imaginaerteil und dann in Positiv- und Negativteil und sehen, dass es reicht, $g \geq 0$ anzunehmen. Wir stellen g als monotonen Limes einfacher Funktionen dar und sehen mit dem Satz von der dominierten Konvergenz, dass wir $g = \mathbf{1}_A$ fuer eine beschraenkte messbaren Menge A annehmen koennen. Wegen der Regularitaet des Lebesgue-Maßes gibt es eine Folge offener Mengen $A \subset U_{n+1} \subset U_n$, so dass $A = \bigcap_n U_n \setminus N$ fuer eine Nullmenge N. Man kann A durch den Schnitt ersetzen und sieht wieder mit dominierter Konvergenz, dass man $A = U$ fuer eine offene Menge U annehmen kann. Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ ist eine abzaehlbare Vereinigung offener Intervalle und daher reicht es, $A = (a,b)$ fuer zwei reelle Zahlen $a < b$ anzunehmen. Dann aber ist die Sache klar mit partieller Integration. □

Satz 7.4.4. *Sei $T \in C_c^\infty(\mathbb{R})'$ und $K \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Teilmenge. Dann existiert eine stetige Funktion ϕ auf $\mathbb{R}$ und ein $m \in \mathbb{N}_0$, so dass*
$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\,f^{(m)}(x)\,dx$$
fuer jedes $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$. Mit anderen Worten, wir haben
$$T|_K = (-1)^m\,I_\phi^{(m)}\big|_K.$$
Das heisst, dass jede Distribution lokal eine iterierte Ableitung einer stetigen Funktion ist.

Beweis. Wir koennen OE annehmen, dass $K \subset (0,1) \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$. Dann gilt fuer jedes $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ dass

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,dt\right| \le \int_0^x |f'(t)|\,dt \le \sup_{t\in K} |f'(t)|,$$

Fuer $n \in \mathbb{N}$ sei $\rho_n(f) = \sup_{x\in K} |f^{(n)}(x)|$ die uebliche Halbnorm. Wir erhalten zwei Abschaetzungen

$$\rho_0(f) \le \rho_1(f) \quad \text{und} \quad \rho_0(f) \le \int_K |f'(t)|\,dt.$$

Iteration liefert

$$\rho_0(f) \le \rho_1(f) \le \cdots \le \rho_n(f) \le \int_K \left|f^{(n+1)}(t)\right|\,dt$$

fuer jedes $n \in \mathbb{N}$. Da T stetig ist auf C_K^∞, gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $C > 0$ so dass fuer jedes $f \in C_K^\infty$ gilt

$$|T(f)| \le \frac{C}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \rho_j(f) \le C\rho_n(f).$$

Insbesondere folgt fuer $f \in C_K^\infty$,

$$|T(f)| \le C \int_K \left|f^{(n+1)}(x)\right|\,dx. \tag{7.4.1}$$

Der lineare operator $D^{n+1}(f) = f^{(n+1)}$ ist injektiv auf C_K^∞. Also koennen wir ein lineares Funktional T_1 auf dem Bild Y von D^{n+1} definieren indem wir setzen:

$$T_1\Big(D^{n+1} f\Big) = T(f).$$

Nach (7.4.1) folgt

$$|T_1(h)| \le C \int_K |h(x)|\,dx, \quad h \in Y.$$

Nach dem Hahn-Banach Satz kann man T_1 zu einem stetigen linearen Funktional T auf $L^1(K)$ fortsetzen. Jedes stetige Funktional auf $L^1(K)$ ist durch Integration gegen eine Funktion in $L^\infty(K) \subset L^1(K)$ gegeben. Daher gibt es ein $g \in L^1(K)$, so dass fuer jedes $f \in C_K^\infty(\mathbb{R})$ gilt

$$T(f) = T_1(D^{n+1} f) = \int_K g(x) f^{(n+1)}(x)\,dx.$$

Nach Lemma 7.4.3 gibt es dann eine stetige Funktion ϕ, so dass

$$T(f) = \int_K \phi(x) f^{(n+2)}(x)\,dx. \qquad \square$$

Beispiel 7.4.5. Fuer $n = 1$ sei $\phi(x) = \max(x, 0)$ und sei $T = \phi''$. Dann gilt fuer $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} T(f) &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f''(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty x f''(x)\,dx \\ &= -\int_0^\infty f'(x)\,dx = f(0). \end{aligned}$$

Also haben wir $\delta = \phi''$.

Satz 7.4.6. *Sei T eine Distribution auf $\mathbb{R}$. Dann existiert fuer jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine stetige Funktion g_n, so dass jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$ nur die Traeger von endlich vielen g_n trifft und dass gilt*

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(n)}.$$

Die Distribution T ist genau dann von endlicher Ordnung, wenn es eine stetige Funktion g und ein $n \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $T = g^{(n)}$ gilt.

Beweis. Sei $\mathbb{R} = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Ueberdeckung so dass $\overline{U_i}$ kompakt ist. Sei $(u_i)_{i \in I}$ eine unterliegende Teilung der Eins. Fuer $f \in C_c^\infty$ gilt dann

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{i \in I} T(u_i f) \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} \phi_i(x)\, (u_i f)^{(n_i)}(x)\, dx \end{aligned}$$

Mit geeigneten stetigen Funktionen ϕ_i und $n_i \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$g_n(x) = (-1)^n \sum_{i \in I} \phi_i(x) \binom{n_i}{n} u_i^{(n_i - n)}(x).$$

Diese Summe ist lokal-endlich, definiert also eine stetige Funktion. Es gilt

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} \phi_i(x)\, (u_i f)^{(n_i)}(x)\, dx \\ &= \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} \phi_i(x) \sum_{n=0}^{n_i} \binom{n_i}{n} u_i^{(n_i - n)}(x)\, f^{(n)}(x)\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\sum_{i \in I} \phi_i(x) \binom{n_i}{n} u_i^{(n_i - n)}(x)}_{=(-1)^n g_n(x)}\, f^{(n)}(x)\, dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n^{(n)}(x)\, f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

* * *

* * *

8 Die Fourier-Transformation

8.1 Die Transformation

Fuer $f \in L^1(\mathbb{R})$ sie die **Fourier-Transformierte** $\hat{f}$ definiert durch

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2\pi i x y} dx.$$

Satz 8.1.1. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

(a) *Ist $g(x) = f(x)\, e^{2\pi i a x}$ fuer $a \in \mathbb{R}$, dann ist $\hat{g}(y) = \hat{f}(y-a)$.*

(b) *Ist $g(x) = f(x-a)$, dann $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)\, e^{-2\pi i a y}$.*

(c) *Ist $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$ fuer $\lambda > 0$, dann $\hat{g}(y) = \lambda \hat{f}(\lambda y)$.*

(d) *Ist $g(x) = -2\pi i x f(x)$ und $g \in L^1(\mathbb{R})$, dann ist $\hat{f}$ stetig differenzierbar und es gilt $\left(\hat{f}\right)'(y) = \hat{g}(y)$.*

(e) *Sei f stetig differenzierbar und nimm an, dass die Funktionen f und f' in $L^1(\mathbb{R})$ liegen. Dann gilt $\widehat{f'}(y) = 2\pi i y \hat{f}(y)$, insbesondere ist $y\hat{f}(y)$ beschraenkt.*

(f) *Sei f zweimal stetig differenziebar und nimm an, dass die Funktionen f, f', f'' alle in $L^1(\mathbb{R})$ liegen. Dann ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.*

Beweis. Die Punkte (a),(b) und (c) sind direkte Konsequenzen der Definition.

(d) Beachte

$$\frac{\hat{f}(y) - \hat{f}(z)}{y-z} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2\pi i z x} \frac{e^{-2\pi i x(y-z)} - 1}{y-z} dx.$$

Fuer $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|e^{it} - 1| \le |t|,$$

weil $|t|$ die Bogenlaenge von 1 nach e^{it} beschreibt, die groesser ist als die Entfernung zu 1. Sei $\phi(x,u) = \frac{(e^{-2\pi i x u} - 1)}{u}$. Dann folgt $|\phi(x,u)| \le 2\pi |x|$ fuer alle $u \neq 0$. Ferner gilt

$$\phi(x,u) \to -2\pi i x \quad \text{fuer } u \to 0,$$

wobei die Konvergenz lokal gleichmaessig in x ist. Nach dem Satz der Differentiation unter dem Integralzeichen, (Satz 14.3.3 Analysis), folgt die Behautung.

(e) folgt mit partieller Integration.

(f) Wende (e) zweimal an und erhalte, dass $y^2 \hat{f}(y)$ beschraenkt ist. Damit ist $\hat{f}$ integrierbar. □

Proposition 8.1.2. *Es ist $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R})$ und die Fourier-Transformation bildet $\mathcal{S}$ in sich ab, also*

$$f \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \hat{f} \in \mathcal{S}.$$

Beweis. Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann ist $(1+x^2)f(x)$ beschraenkt, sei $C > 0$ eine Schranke, also

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \;\le\; C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx \;<\; \infty,$$

so dass $f \in L^1(\mathbb{R})$ folgt. Eine wiederholte Anwendung von Satz 8.1.1 (e) liefert, dass $\hat{f}$ glatt ist, falls $f \in \mathcal{S}$ und dass

$$((-2\pi i x)^n f)\hat{} = \hat{f}^{(n)}$$

fuer jedes $n \in \mathbb{N}$. Eine wiederholte Anwendung von Satz 8.1.1 (f) zeigt, dass fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\widehat{f^{(n)}}(y) = (2\pi i y)^n \hat{f}(y)$$

fuer jedes $n \in \mathbb{N}$. Zusammen folgt, dass fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ und jedes Paar $m, n \ge 0$ die Funktion

$$y^m \hat{f}^{(n)}(y)$$

die Fourier-Transformierte einer Funktion in $\mathcal{S}$ und damit beschraenkt ist. □

* * *

8.2 Die Inversionsformel

Lemma 8.2.1.

(a) *Es ist $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$.*

(b) *Sei $f_0(x) = e^{-\pi x^2}$. Dann ist $\hat{f_0} = f_0$.*

Beweis. (a) Sei L der Wert des Integrals, dann rechnen wir mit Polarkoordinaten:

$$L^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 2\pi \int_0^\infty r e^{-\pi r^2}\, dr = \left[-e^{-\pi r^2} \right]_0^\infty = 1.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \hat{f_0}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2} e^{-2\pi i x y}\, dy = e^{-\pi x^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi (y+ix)^2}\, dy \\ &= f_0(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi (y+ix)^2}\, dy \right) \end{aligned}$$

Man verschiebt den Integrationsweg von $\mathrm{Im}(z) = 0$ nach $\mathrm{Im}(z) = -y$ und erhaelt nach dem Residuensatz

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2}\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}\, dy = 1. \qquad \square$$

Satz 8.2.2. *Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Es gilt die Inversionsformel:*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Beweis. Sei $T(f)(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$. Wir muessen zeigen $T(f) = f$ fuer jedes $f \in \mathcal{S}$. Beachte $T(f_0)(x) = \hat{\hat{f}}_0(-x) = \hat{f}_0(-x) = f_0(-x) = f_0(x)$, da f_0 auch gerade ist, also insgesamt

$$T(f_0) = f_0.$$

Nimm zunaechst an, dass $f(0) = 0$ gilt. Nach dem Satz ueber Taylor-Entwicklung ist dann die Funktion $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ glatt. Ihre Ableitungen sind auch schnell fallend und daher ist $g \in \mathcal{S}$. Damit folgt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \hat{g}}{\partial x}(x).$$

Und daher

$$T(f)(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \hat{g}}{\partial x}(x)\, dx = 0 = f(0).$$

Sei nun $f \in \mathcal{S}$ beliebig. Sei dann

$$h(x) = f(x) - f(0) f_0(x).$$

Dann ist $h \in \mathcal{S}$ und wegen $f_0(0) = 1$ folgt dann $h(0) = 0$, also $T(h)(0) = 0$ oder

$$T(f)(0) = f(0) T(f_0)(0) = f(0) f_0(0) = f(0).$$

Schliesslich sei $f \in \mathcal{S}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ und $g(x) = f(x + x_0)$. Dann ist

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y + x_0) e^{-2\pi i x y}\, dy = e^{2\pi i x x_0} \hat{f}(x).$$

Also

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(0) = T(g)(0) = \hat{\hat{g}}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x x_0} \hat{f}(x)\, dx = T(f)(x_0). \end{aligned} \qquad \square$$

Satz 8.2.3 (Plancherel-Satz). *Fuer $f, g \in \mathcal{S}$ ist*

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = \langle f, g \rangle .$$

wobei $\langle ., . \rangle$ das Skalarprodukt des Hilbert-Raums $L^2(\mathbb{R})$ ist, also durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

definiert wird. Es folgt, dass die Fourier-Transformation in eindeutiger Weise zu einem unitaeren Isomorphismus

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\cong} L^2(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

ausgedehnt werden kann.

Beweis. (a) Betrachte das zugehoerige Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{f}, g \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{-2\pi i x y}\, dy\, \overline{g(x)}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x y} g(-x)\, dx\, dy} \\ &= \left\langle f, \widehat{\check{g}} \right\rangle , \end{aligned}$$

wobei $\check{g}(x) = g(-x)$. Wegen $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ folgt insbesondere

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle = \left\langle \check{f}, \check{f} \right\rangle = \left\langle \hat{\hat{f}}, \check{f} \right\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{f} \right\rangle = \|f\|_2^2 . \qquad \square$$

* * *

8.3 Temperierte Distributionen

Sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Schwartz-Raum, also der Raum aller $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ so dass fuer alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\rho_{m,n}(f) < \infty$, wobei

$$\rho_{m,n}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m f^{(n)}(x)|.$$

Dann ist $\mathcal{S}$ stabil unter der Fourier-Transformation:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-2\pi i x y}\, dy.$$

Der Raum $\mathcal{S}$ erhaelt eine lokalkonvexe Topologie durch die Halbnormen $\rho_{m,n}$.

Lemma 8.3.1. *Die Einbettung*

$$i : \mathcal{S} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

ist eine stetige lineare Abbildung.

Beweis. Betrachte die stetige Halbnorm $\rho = \rho_{0,0} + \rho_{1,0}$. Fuer $f \in \mathcal{S}$ ist $|f(x)| \leq \frac{\rho(f)}{1+|x|}$. Daher

$$\begin{aligned} \left\|f\right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \\ &\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|)^2}\, dx}_{C}\ \rho(f)^2 \end{aligned}$$

und es folgt $\left\|f\right\|_2 \leq C\rho(f)$ und daher ist i stetig. □

Definition 8.3.2. Eine *temperierte Distribution* ist eine stetige lineare Abbildung

$$T : \mathcal{S} \to \mathbb{C}.$$

Der Raum der temperierten Distributionen wird mit $\mathcal{S}'$ bezeichnet.

Beispiel 8.3.3. Jede Distribution $T \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ mit kompaktem Traeger definiert eine temperierte Distribution.

Satz 8.3.4.

(a) *Der Raum $C_c^\infty(\mathbb{R})$ liegt dicht in $\mathcal{S}$.*

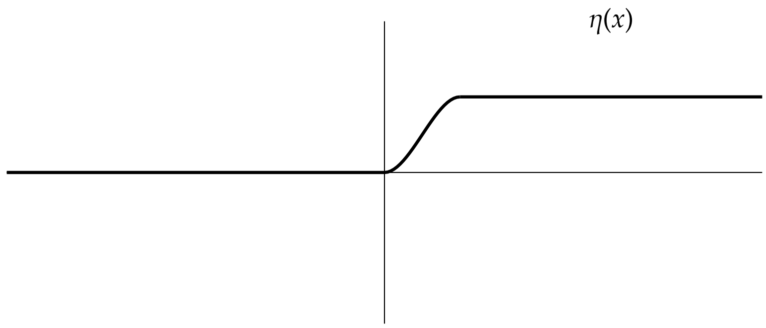
(b) *Die Einschraenkungsabbildung*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' &\to C_c^\infty(\mathbb{R})', \\ T &\mapsto T|_{C_c^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

ist injektiv.

Wir koennen also den Raum der temperierten Distributionen als einen Teilraum des Raums aller Distributionen auffassen.

Beweis. (a) Sei $f \in \mathcal{S}$. Sei η eine glatte Funktion $\mathbb{R} \to [0, 1]$ mit $\eta(x) = 0$ falls $x \leq 0$ und $\eta(x) = 1$ fuer $x \geq 1$.



Fuer $j \in \mathbb{N}$ setze

$$\chi_j(x) := \eta(j+x)\eta(j-x).$$

Dann hat χ_j kompakten Traeger und $\chi_j(x) = 1$ fuer $|x| \le j-1$. Sei $f_j(x) = \chi_j(x) f(x)$. Dann liegt f_j in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ und die Folge f_j konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen f (Uebungsaufgabe).

(b) Sei $T \in \mathcal{S}'$ mit $T(g) = 0$ fuer jedes $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Sei $f \in \mathcal{S}$. Nach Teil (a) gibt es eine Folge $f_j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, die in $\mathcal{S}$ gegen f konvergiert. Es folgt $T(f) = \lim_j T(f_j) = 0$, also $T = 0$. □

Lemma 8.3.5. *Sei ϕ eine lokal-integrierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, so dass es eine natuerliche Zahl N gibt mit der Eigenschaft*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| \frac{1}{1+|x|^N}\, dx \ < \ \infty.$$

Dann konvergiert das Integral $I_\phi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x)\, dx$ fuer jede Funktion $f \in \mathcal{S}$ und definiert eine temperierte Distribution $f \mapsto I_\phi(f)$.

Beweis. Die Konvergenz des Integrals ist klar, also bleibt zu zeigen, dass es eine temperierte Distribution definiert. Seien ϕ und N wie im Lemma. Sei $C = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)| \frac{1}{1+|x|^N}\, dx$, wobei wir ohne Einschraenkung $C > 0$ annehmen koennen. Fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ gilt dann

$$\begin{aligned} |I_\phi(f)| &\le \int_R |\phi(x)||f(x)|\, dx \\ &\le C \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)||1+|x|^N = C\Big(\rho_{0,0}(f) + \rho_{0,N}(f)\Big). \end{aligned}$$ □

Beispiel 8.3.6. Wir zeigen, dass $f(x) = e^{x^2}$ keine temperierte Distribution auf $\mathbb{R}$ ist.

Beweis. Die Funktion $g(x) = e^{-\sqrt{1+x^2}}$ liegt in $\mathcal{S}$, wie man leicht sieht. Sei $\chi_j(x)$ wie im Beweis von Satz 8.3.4. Die Funktionenfolge

$$g_j(x) = \chi_{j+1} g(x)$$

konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen g. Es gilt aber

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) g_n(x)\, dx &\ge \int_{-n}^{n} f(x) g(x)\, dx \\ &= \int_{-n}^{n} e^{x^2 - \sqrt{1+x^2}}\, dx \end{aligned}$$

und dies geht gegen $+\infty$ fuer $n \to \infty$. Daher ist f keine temperierte Distribution. Dies widerspricht dem Satz von Hahn-Banach nicht, da $\mathcal{S}$ eine andere Topologie traegt als $C_c^\infty(\mathbb{R})$. □

8.4 Fourier Transformation von Distributionen

Fuer $f \in \mathcal{S}$ schreiben wir $f^\vee(x) = f(-x)$. Die Fourier-Inversionsformel besagt $\widehat{\hat{f}} = f^\vee$ und der Plancherel-Satz besagt $\langle f, g\rangle = \left\langle \hat{f}, \hat{g}\right\rangle$. Fuer $\phi, f \in \mathcal{S}$ gilt daher

$$I_{\hat{\phi}}(f) = \left\langle \hat{\phi}, \overline{f}\right\rangle = \left\langle \widehat{\hat{\phi}}, \hat{\overline{f}}\right\rangle = \left\langle \phi^\vee, \hat{\overline{f}}\right\rangle = \left\langle \phi, \hat{\overline{f}}^\vee\right\rangle.$$

Ferner,

$$\hat{\overline{f}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)} e^{-2\pi i x y}\, dy = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{2\pi i x y} dy} = \overline{\hat{f}(-x)}.$$

Damit folgt $\hat{\overline{f}}^\vee = \overline{\hat{f}}$ und daher

$$I_{\hat{\phi}}(f) = I_\phi(\hat{f}).$$

Definition 8.4.1. Wir definieren die **Fourier-Transformation** einer temperierten Distribution T durch

$$\hat{T}(f) := T(\hat{f}).$$

Beispiele.

- Sei $I(f) = \int_\infty^\infty f(x)\, dx$. Dann ist
$$\hat{I}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\, dx = f(0).$$
Also ist $\hat{I} = \delta$.
- Ebenso berechnen wir
$$\hat{\delta}(f) = \delta(\hat{f}) = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = I(f).$$

Lemma 8.4.2. *Fuer jede temperierte Distribution T und jedes $f \in \mathcal{S}$ gilt*

$$\widehat{\hat{T}}(f) = T(f^\vee).$$

Beweis. Es ist

$$\widehat{\hat{T}}(f) = \hat{T}(\hat{f}) = T(\widehat{\hat{f}}) = T(f^\vee).$$ □

Proposition 8.4.3. *Sei T eine temperierte Distribution.*

(a) *Ist $T(x) = S(x)\, e^{2\pi i a x}$ fuer $a \in \mathbb{R}$ und eine temperierte Distribution S,, dann ist $\hat{T}(y) = \hat{S}(y - a)$.*

(b) *Ist $T(x) = S(x - a)$, dann $\hat{T}(y) = \hat{S}(y)\, e^{-2\pi i a y}$.*

(c) *Ist* $T(x) = -2\pi ix\, S(x)$*, dann ist* $\hat{T} = \left(\hat{S}\right)'$.

(d) *Ist* $T = S'$*, dann ist* $\hat{T}(x) = -2\pi ix\, S(x)$.

Beweis. Die Proposition folgt aus den entsprechenden Aussagen fuer Funktionen, also Satz 8.1. □

Definition 8.4.4. Eine glatte Funktion f hat mit allen Ableitungen **moderates Wachstum**, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f^{(n)}(x)|}{1+|x|^N} \ < \ \infty.$$

Das bedeutet also, dass jede Ableitung hoechstens polynomial waechst.

Lemma 8.4.5. *Sei f mit allen Ableitungen von moderatem Wachstum und $g \in \mathcal{S}$. Dann liegt das punktweise Produkt fg in $\mathcal{S}$. Konvergiert eine Folge (g_j) in $\mathcal{S}$ gegen g, dann konvergiert fg_j gegen fg.*

Beweis. Partielle Ableitungen von fg sind Linearkombinationen von Ausdruecken der Form $f^{(m)}\, g^{(n)}$. Damit folgt, dass $fg \in \mathcal{S}$ und auch die Konvergenzaussage. □

Satz 8.4.6. *Sei T eine temperierte Distribution. Dann existiert eine stetige Funktion F von moderatem Wachstum und ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass*

$$T = F^{(N)}.$$

Beweis. Der Beweis fuer den Fall allgemeiner Distributionen, Satz 7.4.4, kann auf den Fall einer temperierten Distribution angepasst werden. □

* * *

8.5 Der Satz von Paley-Wiener

Lemma 8.5.1. *Ist T eine Distribution mit kompaktem Traeger. Dann ist $\widehat{T}$ durch eine ganze Funktion gegeben.*

Genauer gilt: Ist K der Traeger von T, dann gibt es eine stetige Funktion ϕ mit Traeger K und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\widehat{T}(x) = \int_K \phi(y)\, e^{-2\pi ixy}\, dy\, (2\pi ix)^n.$$

Beweis. Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und eine stetige Funktion ϕ mit kompaktem Traeger, so dass $T = \phi^{(n)}$. Sei

$K = \mathrm{supp}(T)$. Fuer $f \in \mathcal{S}$ setze $f_n(x) = (2\pi i x)^n f(x)$. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\hat{T}(f) = T(\hat{f}) &= (-1)^n \int_K \hat{f}^{(n)}(x)\, \phi(x)\, dx \\
&= \int_K \hat{f}_n(x)\, \phi(x)\, dx \\
&= \int_K \int_{\mathbb{R}} f_n(y)\, e^{-2\pi i x y}\, dy\, \phi(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_K \phi(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx\, f_n(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_K \phi(x)\, e^{-2\pi i x y}\, dx\, (2\pi i y)^n\, f(y)\, dy.
\end{aligned}$$

□

Satz 8.5.2 (Paley-Wiener fuer Funktionen). *Sei f eine ganze Funktion und sei $r > 0$. Dann sind aequivalent:*

(a) *f ist die Fourier-Transformation einer Funktion $\phi \in C^\infty_{[-r,r]}(\mathbb{R})$.*

(b) *Es gibt Konstanten $\gamma_n > 0$ fuer $n = 0, 1, 2 \dots$ so dass*

$$|f(z)| \le \frac{\gamma_n}{(1 + |z|)^n}\, e^{2\pi r |\mathrm{Im}(z)|}$$

fuer jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Satz 8.5.3 (Paley-Wiener fuer Distributionen). *Sei f eine ganze Funktion und $r > 0$. Dann sind aequivalent:*

(a) *f ist die Fourier-Transformation einer Distribution T mit Traeger in $[-r, r]$.*

(b) *Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $C > 0$, so dass*

$$|f(z)| \le C\, (1 + |z|^2)^n\, e^{2\pi r |\mathrm{Im}(z)|}$$

fuer jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Beweis des Satzes fuer Funktionen. (a)⇒(b): Sei $f = \hat{\phi}$. Dann erhaelt man mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
\left| z^n f(z) \right| &= \frac{1}{(2\pi)^n} \left| \int_{-r}^{r} \phi^{(n)}(t) e^{-2\pi i t z}\, dt \right| \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-r}^{r} |\phi^{(n)}(t)|\, dt\; e^{2\pi r |\mathrm{Im}(z)|}
\end{aligned}$$

(b)⇒(a): Sei f eine ganze Funktion wie in der Voraussetzung und setze $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i t x}\, dx$. Da

$(1+|x|^n)f(x)$ fuer jedes n integrierbar ist, kann man unter dem Integral differenzieren und stellt fest, dass $\phi \in C^\infty$ ist. Durch Verschieben des Integrationswegs ins Komplexe, was wegen der Wachstumsbedingung moeglich ist, stellt man fest dass

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i t x}\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x+iy) e^{2\pi i t(x+iy)}\, dx$$

fuer jedes $y \in \mathbb{R}$. Fuer $y > 0$ gilt dann

$$\begin{aligned} |f(x+iy)e^{2\pi i t(x+iy)}| &= |f(x+iy)| e^{-2\pi t y} \\ &\le \gamma_n (1+|x|)^{-n} e^{2\pi(r-t)y} \end{aligned}$$

und daher

$$|\phi(t)| \le \gamma_n e^{2\pi(r-t)y} \int_{\mathbb{R}} (1+|x|)^{-n}\, dx.$$

Mit $y \to \infty$ folgt $\phi(t) = 0$ fuer $t > r$. Ersetzt man $f(z)$ durch $f(-z)$, so erhaelt man auch $\phi(t) = 0$ fuer $t < -r$. □

Beweis des Satzes fuer Distributionen. (a)⇒(b): Nach dem Lemma gibt es eine stetige Funktion ϕ mit Traeger in $[-r, r]$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$T(x) = \int_{-r}^{r} \phi(y)\, e^{-2\pi i x y}\, dy\, (2\pi i x)^n.$$

Hieraus folgt die Behauptung wie im Funktionenfall.

(b)⇒(a): Sei f wie in der Voraussetzung. Dann ist f die Fourier-Transformierte der Distribution $T = \widehat{I_{f^\vee}}$. Wir muessen also zeigen, dass die Distribution $T = \widehat{I_f}$ Traeger in $[-r, r]$ hat. Sei h eine Testfunktion mit Traeger in (r, ∞) (der andere Fall geht analog). Sei $g \in \mathcal{S}$ die Fourier-Transformierte von $\hat{h}(-x)(1+x^2)^{n+1}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T(h) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \hat{h}(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, \hat{h}(x)(1+x^2)^{n+1}\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, \hat{g}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \int_r^\infty g(y)\, e^{2\pi i x y}\, dy\, dx \\ &= \int_r^\infty g(y) \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{2\pi i x y}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Fuer $z \in \mathbb{C}$ gilt $|e^{2\pi i z y}| = e^{-2\pi y \operatorname{Im}(z)}$, also fuer $\operatorname{Im}(z) \ge 0$ gilt

$$\left| \frac{f(z)}{(1+|z|^2)^{n+1}}\, e^{2\pi i x y} \right| \le C \frac{e^{2\pi(r-y)\operatorname{Im}(z)}}{1+|z|^2}.$$

Man verschiebt das Integral $\int_{\mathbb{R}}$ in der Ebene nach oben und sieht, dass es wegen $r - y < 0$ gegen Null geht. □

Definition 8.5.4. Fuer ein Polynom $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$ schreiben wir $P(\partial)$ fuer den Differentialoperator

$$P(\partial) = a_0 + a_1 \partial + a_2 \partial^2 + \cdots + a_n \partial^n.$$

Satz 8.5.5 (Spielzeugbeispiel)**.** *Hat das Polynom $P(2\pi i x)$ keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, dann gibt es zu jedem $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ein $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ mit $P(\partial)v = u$.*

Beweis. Nach Satz 8.1.1 (f) gilt $\widehat{P(\partial)f}(y) = P(2\pi i y)\widehat{f}(y)$. Sei u gegeben. Die Funktion $v(x) = \widehat{h}(-x)$ mit

$$h(y) = \frac{\widehat{u}(y)}{P(2\pi i y)}$$

liegt in $\mathcal{S}$ und es gilt

$$\widehat{P(\partial)v}(y) = P(2\pi i y)\widehat{v}(y) = P(2\pi i y)h(y) = \widehat{u}(y),$$

so dass $P(\partial)v = u$ folgt. □