Pseudodifferentialoperatoren und Indextheorie

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Fourier-Transformation und Sobolev-Raeume

Auf $\mathbb{R}^n$ haben wir das euklidische Skalarprodukt

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

und die Norm

$$\|x\| = |x| := \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Ein **Multiindex** α ist ein Element der Menge $(\mathbb{N}_0)^n$. Fuer einen solchen sei

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, \qquad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!.$$

Ist $x \in \mathbb{R}^n$ und α ein Multiindex, so schreiben wir

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

und

$$\partial_x^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

sowie

$$D_x^\alpha = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha.$$

Beispiel 1.1. Ist f eine glatte (=∞ oft differenzierbare) Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so schreibt sich der Satz von Taylor als

$$f(x) = \sum_{|al|\le k} \partial_x^\alpha f(x_0) \frac{(x-x_0)^\alpha}{\alpha!} + O\left(\|x - x_0\|^{k+1}\right).$$

Sei $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ der komplexe Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. Sei $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ er Unterraum der Funktionen mit kompaktem Traeger. Ferner sei $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ der **Schwartz-Raum**, d.h., der Raum der $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ so dass fuer je zwei Multiindizes α, β die Funktion $x \mapsto x^\alpha \partial_x^\beta f(x)$ beschraenkt ist.

Beispiel 1.2. $f(x) = e^{-|x|^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Auf $\mathcal{S}$ haben wir die Halbnormen

$$\rho_{\alpha,m}(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|\partial_x^\alpha f(x)\right| \left(1 + |x|^2\right)^m$$

wobei $\alpha = \mathbb{N}_0^n$ und $m \in \mathbb{N}$. Diese definieren eine Topologie auf $\mathcal{S}$, d.h., eine Folge f_k

konvergiert in $\mathcal{S}$ gegen f, falls $\rho_{\alpha,m}(f_k - f) \to 0$ fuer jedes Paar α, m gilt.

Lemma 1.3 (Faltung). *Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dann ist die Funktion*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)g(-y)\,dy$$

wieder in $\mathcal{S}$. Es gilt $(f*g)*h = f*(g*h)$ sowie $f*g = g*f$ und $f*(h+g) = f*h + f*g$.

Beweis. Differentiation unter dem Integralzeichen liefert dass $f*g$ glatt ist und dass $\partial^\alpha(f*g) = f*(\partial^\alpha g) = (\partial^\alpha f)*g$ gilt. Daher reicht es, zu zeigen, dass $x^\alpha f*g(x)$ beschraenkt ist fuer jeden Multiindex α. Wir zeigen dies durch Induktion nach $|\alpha|$. Fuer $\alpha = 0$ ist

$$|f*g(x)| \le \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,dy \sup_{z\in\mathbb{R}^n} |g(z)| = C < \infty.$$

Nun zum Induktionsschritt. Sei $M^\alpha f(x) = x^\alpha f(x)$. Dann ist $M^\alpha(f*g) - f*(M^\alpha g)$ eine Linearkombination von Ausdruecken der Gestalt $M^\beta((M^\gamma f)*g)$, wobei $|\beta| < |\alpha|$. Damit folgt die Behauptung nach Induktion. □

Definition 1.4. Unter einer **Approximativen Eins** verstehen wir eine Folge $f_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\operatorname{supp}(f_k) \subset B_{1/k}(0)$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1,$$

wobei $B_r(z)$ den offenen Ball mir Radius r um z bezeichnet.

Lemma 1.5. *Ist (f_k) eine approximative Eins und ist $g \in \mathcal{S}$, dann konvergiert $f_k * g$ gegen g in $\mathcal{S}$.*

Beweis. Wir zeigen $\rho_{\alpha,m}(f_k * g - g) \to 0$ fuer $k \to \infty$. Wegen $\partial^\alpha(f_k*g) = f_k * \partial^\alpha g$ reicht es, $\alpha = 0$ anzunehmen. Sei Dg das Differential von g. Fuer gegebenes m gibt es $C > 0$ so dass

$$\left\|Dg(x+h)\right\| \le \frac{C}{(1+\|x\|^2)^m}$$

fuer jedes $x \in \mathbb{R}^n$ und jedes $h \in B_{1/k}(0)$ gilt. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz der

Differentialrechnung zu $x, y \in \mathbb{R}$, ein $\xi_{x,y}$ zwischen x und $x - y$ so dass

$$\begin{aligned} |f_k * g(x) - g(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y)|g(x-y) - g(x)|\, dy \\ &= \int_{B_{1/k}(0)} f_k(y) \left\|Dg(\xi_{x,y})\right\| \left\|y\right\| \, dy \\ &\leq \frac{C}{(1+\|x\|^2)^m} \frac{1}{k} \int_{B_{1/k}(0)} f_k(y)\, dy \\ &= \frac{1}{k} \frac{C}{(1+\|x\|^2)^m}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\rho_{0,m}(f_k * g - g) \leq \frac{C}{k} \to 0$ fuer $k \to \infty$. $\square$

Definition 1.6. Sei $f \in \mathcal{S}$, dann ist die **Fourier-Transformierte** von f gleich

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy.$$

Lemma 1.7. *Es gilt*

$$\widehat{D^\alpha f} = M^\alpha \hat{f} \quad \text{und} \quad \widehat{M^\alpha f} = D^\alpha \hat{f}.$$

Insbesondere folgt, dass die Fourier-Transformation $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ abbildet.

Beweis. Nachrechnen mit Hilfe von partieller Integration. $\square$

Lemma 1.8. (a) *Es ist* $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\, dx = 1$.

(b) *Sei* $f_0(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$. *Dann ist* $\hat{f_0} = f_0$.

Beweis. (a) Sei L der Wert des Integrals, dann rechnen wir mit Polarkoordinaten:

$$L^2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(x^2+y^2)}\, dx\, dy = 2\pi \int_0^\infty r e^{-\pi r^2}\, dr = \left[-e^{-r^2}\right]_0^\infty = 1.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} \hat{f_0}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\left\|y\right\|^2} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy = e^{-\pi\|x\|^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\langle y+ix, y+ix \rangle}\, dy \\ &= f_0(x) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2}\, dy \right)^n \end{aligned}$$

Man verschiebt den Integrationsweg von $\mathrm{Im}(z) = x$ nach $\mathrm{Im}(z) = 0$ und erhaelt nach dem Residuensatz

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi(y+ix)^2}\,dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi y^2}\,dy = 1. \qquad \square$$

Satz 1.9. *Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. Es gilt die Inversionsformel:*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Beweis. Sei $T(f)(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$. Wir muessen zeigen $T(f) = f$ fur jedes $f \in \mathcal{S}$. Beachte $T(f_0)(x) = \hat{\hat{f_0}}(-x) = \hat{f_0}(-x) = f_0(-x) = f_0(x)$, da f_0 auch gerade ist, also

$$T(f_0) = f_0.$$

Nimm zunaechst an, dass $f(0) = 0$ gilt. Dann ist

$$f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \sum_j x_j \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_j}(tx)\,dt = \sum_j x_j g_j(x).$$

Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung der Null. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \phi(x) f(x) + (1 - \phi(x)) f(x) \\ &= \sum_j x_j \phi g_j + \sum_j x_j \frac{x_j (1-\phi) f}{\|x\|^2} \\ &= \sum_j x_j h_j \end{aligned}$$

mit $h_j \in \mathcal{S}$. Damit folgt

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_j \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial x_j}(x).$$

Und daher

$$T(f)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \sum_j \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \hat{h}_j}{\partial x_j}(x)\,dx = 0 = f(0).$$

Sei nun $f \in \mathcal{S}$ beliebig. Sei dann

$$h = f(x) - f(0) f_0(x).$$

Dann ist $h \in \mathcal{S}$ und wegen $f_0(0) = 1$ folgt dann $h(0) = 0$ Also $T(h)(0) = 0$ oder

$$T(f)(0) = f(0)T(f_0)(0) = f(0)f_0(0) = f(0).$$

Schliesslich sei $f \in \mathcal{S}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $g(x) = f(x + x_0)$. Dann ist

$$\hat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y + x_0)e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy = e^{2\pi i \langle x,x_0 \rangle}\hat{f}(x).$$

Also

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(0) = T(g)(0) = \hat{\hat{g}}(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x,x_0 \rangle}\hat{f}(x)\, dx = T(f)(x_0). \end{aligned}$$ □

Satz 1.10. (a) *Fuer* $f, g \in \mathcal{S}$ *gilt* $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.

(b) *Es gilt der* **Plancherel-Satz**, *d.h. fuer* $f, g \in \mathcal{S}$ *ist*

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2,$$

wobei $\|.\|_2$ *die Norm des Hilbert-Raums* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *ist, also durch*

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2\, dx$$

definiert wird. Es folgt, dass die Fourier-Transformation in eindeutiger Weise zu einem unitaeren Isomorphismus

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{R}^n) &\xrightarrow{\cong} L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned}$$

ausgedehnt werden kann.

Beweis. (a) Wegen absoluter Konvergenz koennen wir unter Benutzung des Satzes von Fubini rechnen

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(y) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y-z)\, dz\, e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) g(y-z) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy\, dz \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy\, e^{-2\pi i \langle x,z \rangle}\, dz = \hat{f}(x)\hat{g}(x).
\end{aligned}$$

(b) Betrachte das zugehoerige Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\, dx.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
(\hat{f}, g) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i \langle x,y \rangle}\, dy \overline{g(x)}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle x,y \rangle} g(-x)\, dx}\, dy \\
&= (f, \widehat{\check{g}}),
\end{aligned}$$

wobei $\check{g}(x) = g(-x)$. Wegen $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ folgt insbesondere

$$\|f\|_2^2 = (f, f) = (\check{f}, \check{f}) = (\hat{\hat{f}}, \check{f}) = (\hat{f}, \hat{f}) = \|f\|_2^2 . \qquad \square$$

Definition 1.11 (Sobolev-Raeume)**.** Fuer $s \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{S}$ sei

$$|f|_s = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^s |\hat{f}(x)|^2\, dx.$$

Weiter sei $H_s(\mathbb{R}^n)$ die Vervollstaendigung von $\mathcal{S}$ bezueglich der Norm $|.|_s$. Damit stellt die Fourier-Transformation einen Hilbert-Raum Isomorphismus

$$H_s(\mathbb{R}^n) \cong L^2\left(\mathbb{R}^n, \left(1 + |x|^2\right)^s\, dx\right)$$

her.

Man beachte, dass

$$H_0(\mathbb{R}^n) \cong L^2(\mathbb{R}^n).$$

Lemma 1.12. *Sei α ein Multiindex. Dann induziert D^α einen stetigen linearen Operator*

$H_s(\mathbb{R}^n) \to H_{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Aus der Ungleichung

$$(x^\alpha)^2 \left(1 + |x|^2\right)^{s-|\alpha|} \leq \left(1 + |x|^2\right)^s$$

folgt

$$|D^\alpha f|_{s-|\alpha|} = \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \hat{f}(x)|^2 \left(1 + |x|^2\right)^{s-|\alpha|} dx \leq |f|_s^2. \qquad \square$$

Lemma 1.13. *Sei*

$$\Delta = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2$$

der **Laplace-Operator**. *(Das Vorzeichen bewirkt $\Delta \geq 0$.) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f \in C^{2k}(\mathbb{R}^n)$ mit $f, \Delta f, \ldots, \Delta^k f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann ist $f \in H_{2k}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

$$|f|_{2k}^2 = \left|(1 + \Delta)^k f\right|_0^2.$$

Beweis. Fuer die Fourier-Transformierte von f gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{2j} |\hat{f}(x)|^2 dx < \infty$$

fuer $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Damit ist

$$|f|_{2k}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |x|^2\right)^k |\hat{f}(x)|^2 dx \ < \ \infty.$$

Es ist

$$\left(1 + \widehat{\frac{1}{4\pi^2}\Delta}\right) f(x) = \hat{f}(x) + \sum_{j=1}^{n} \widehat{D^{2e_j} f}(x) = (1 + \|x\|^2)\hat{f}(x),$$

wobei $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ mit der Eins an der j-ten Stelle. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Lemma 1.14 (Sobolev Lemma). *Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei $s > k + \frac{n}{2}$. Ist $f \in H_s$, so folgt $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ und fuer die Halbnorm*

$$|f|_{\infty,k} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} |D_x^\alpha f(x)|$$

gilt

$$|f|_{\infty,k} \leq C|f|_s.$$

Beweis. Sei zunaechst $k = 0$ und $f \in \mathcal{S}$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x,y \rangle} \hat{f}(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x,y \rangle} \hat{f}(y) \left(1 + |y|^2\right)^{s/2} \left(1 + |y|^2\right)^{-s/2} dy. \end{aligned}$$

Also folgt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|f(x)|^2 \leq |f|_s^2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + |y|^2\right)^{-s} dy.$$

Da $2s > n$, ist $|f(x)| \leq C|f|_s$, also $|f|_{\infty,0} \leq C|f|_s$. Ist nun $g \in H_s$, dann ist g ein Limes in $|.|_s$ von Funktionen aus $\mathcal{S}$, also damit ist g gleichmaessiger Limes von stetigen Funktionen und also stetig, d.h., wir haben $H_s \subset C^0(\mathbb{R}^n)$ und die Behauptung fuer $k = 0$. Fuer $k > 0$ benutze

$$|f|_{\infty,k} \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|_{\infty,0} \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha f|_{s-|\alpha|} \leq C'|f|_s. \qquad \square$$

Bemerkung. Ist $s > t$, dann gilt $(1 + |y|^2)^s \geq (1 + |y|^2)^t$ und also ist die Inklusion

$$H_s \hookrightarrow H_t$$

eine stetige lineare Abbildung.

Lemma 1.15 (Rellich Lemma)**.** *Sei $f_k \in \mathcal{S}$ eine Folge mit* supp $f_k \subset K$ *fuer ein festes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^n$. Es gelte $|f_k|_s \leq C$ fuer alle k und ein $C > 0$. Dann existiert eine Teilfolge f_{k_ν}, die in H_t konvergiert fuer jedes $t < s$.*

Beweis. Sei $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ so dass $g \equiv 1$ in einer Umgebung von K. Dann ist $f_k = gf_k$, also $\hat{f}_k = \hat{g} * \hat{f}_k$. Sei $\partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Dann gilt $\partial_j(\hat{g} * \hat{f}_k) = \partial_j \hat{g} * f_k$, also gilt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \left|\partial_j \hat{f}_k(\xi)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_j \hat{g}(\xi - \zeta) \hat{f}_k(\zeta)|\, d\zeta \\ &\leq |f_k|_s \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\partial_j \hat{g}(\xi - \zeta)\right|^2 \left(1 + |\zeta|^2\right)^{-s} d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}}_{=h(\xi)} \\ &\leq Ch(\xi), \end{aligned}$$

wobei h eine stetige beschraenkte Funktion ist. Ebenso schaetzen wir $\hat{f}_k$ ab. Also ist $\hat{f}_k$

eine gleichmaessig beschraenkte gleichstetige Folge und enthaelt nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine lokal gleichmaessig konvergente Teilfolge f_{k_ν}. Fuer $t < s$ gilt

$$|f_{k_\nu} - f_{k_\mu}|_t^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}_{k_\nu}(\xi) - \hat{f}_{k_\mu}(\xi)\right|^2 \left(1 + |\xi|^2\right)^t \, d\xi.$$

Sei $r > 0$. Wir zerlegen das Integral in die Teile $|\xi| \geq r$ und $|\xi| < r$. Da die Abbildung $0 < x \mapsto (1 + x^2)^{t-s}$ monoton fallend ist, gilt fuer $|\xi| \geq r$, dass $(1 + |\xi|^2)^t \leq (1 + r^2)^{t-s} (1 + |\xi|^2)^s$. Daher ist

$$\begin{aligned}\int_{|\xi|\geq r} \left|\hat{f}_{k_\nu} - \hat{f}_{k_\mu}\right|^2 \left(1 + |\xi|^2\right)^t \, d\xi &\leq \left(1 + r^2\right)^{t-s} \int_{|\xi|\geq r} \left|\hat{f}_{k_\nu} - \hat{f}_{k_\mu}\right|^2 \left(1 + |\xi|^2\right)^s \, d\xi \\ &\leq C(1 + r^2)^{t-s}.\end{aligned}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ waehle r so gross, dass $C\left(1 + r^2\right)^{t-s} < \varepsilon$. Das Integral ueber $|\xi| < r$ wird beliebig klein, da $\hat{f}_{k_\mu}$ lokal-gleichmaessig konvergiert. Daher ist (f_{k_μ}) eine Cauchy-Folge in H_t. □

Lemma 1.16. (a) *Die Paarung* $(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx$ *definiert auf* $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$*, setzt fort zu einer perfekten Paarung* $H_s \times H_{-s} \to \mathbb{C}$*. Es gilt fuer* $f, g \in \mathcal{S}$,

$$|(f, g)| \leq |f|_s |g_{-s}.$$

(b) *Zu* $f \in \mathcal{S}$ *existiert* $g \in \mathcal{S}$ *so dass* $(f, g) = |f|_s |g|_{-s}$ *und es gilt*

$$|f|_s = \sup_{\substack{g\in\mathcal{S} \\ g\neq 0}} \frac{|(f, g)|}{|g|_{-s}}.$$

Beweis. (a) ist eine Konsequenz der Selbstdualitaet von L^2 und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

(b) "≥" ist nach (a) klar. Definiere g durch $\hat{g} = \hat{f}\left(1 + \xi|^2\right)^s$. Dann folgt $(f, g) = (\hat{f}, \hat{g}) = |f|_s$, also $|g|_{-s}^2 = |f|_s^2$. □

2 Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathbb{R}^n$

Definition 2.1. Ein **Differentialoperator** der **Ordnung** d auf dem $\mathbb{R}^n$ ist ein Operator der Form

$$D = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x) D_x^\alpha = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x) \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^{|\alpha|} \partial_x^\alpha$$

mit glatten Funktionen a_α, so dass es ein α mit $|\alpha| = d$ gibt so dass $a_\alpha \neq 0$. Das **Symbol** von D ist die Funktion

$$\sigma_D(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Wenn klar ist, von welchem Operator die Rede ist, schreiben wir auch $p(x,\xi)$ fuer das Symbol. Das Symbol des Laplace-Operators ist zum Beispiel:

$$\sigma_\Delta(x,\xi) = 4\pi^2 \sum_{j=1}^n \xi_j^2 = 4\pi^2|\xi|^2.$$

Das **Hauptsymbol** ist

$$\sigma_D^H(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\begin{aligned} Df(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} p(x,\xi) f(y)\, dy\, d\xi. \end{aligned}$$

Beachte, dass das Doppelintegral nicht absolut konvergiert und die Integrationsreihenfolge nicht geaendert werden darf.

Definition 2.2. Seien $d \in \mathbb{R}$ und $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein **Symbol** der Ordnung d auf U ist eine C^∞-Abbildung $p : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, so dass

(a) $p(x,\xi)$ kompakten Traeger in x hat, d.h., es existiert ein Kompaktum $K \subset U$, so dass $\operatorname{supp}(p) \subset K \times \mathbb{R}^n$ und

(b) fuer je zwei Multiindices α, β eine Konstante $C_{\alpha,\beta} > 0$ existiert mit

$$\left|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \le C_{\alpha,\beta}\,(1+|\xi|)^{d-|\beta|}.$$

Wir schreiben $S^d(U)$ fuer die Menge aller Symbole der Ordnung d und $S^d = S^d(\mathbb{R}^n)$. Die Menge aller Symbole S^∞ ist die Vereinigung S aller S^d.

Definition 2.3 (Pseudodifferentialoperator)**.** Sei p ein Symbol. Definiere den Operator $p(x, D)$ durch

$$p(x, D)f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x, \xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Lemma 2.4. *$p(x, D)$ definiert einen stetigen linearen Operator von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$.*

Beweis. Die Funktion $p(x, D)f$ ist unendlich oft differenzierbar. Ist p ein Symbol der Ordnung d, dann ist $D^\alpha_x(p(x, D)f(x) = q(x, D)f$ fuer ein Symbol q der Ordnung $d + |\alpha|$. Wir benutzen partielle Integration

$$\begin{aligned}
\left|x^\alpha p(x, D)f(x)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} x^\alpha e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x, D)\hat{f}(\xi)\, d\xi\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^\alpha \partial^\alpha_x e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x, D)\hat{f}(\xi)\, d\xi\right| \\
&= C\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} D^\alpha_x p(x, D)\hat{f}(\xi)\, d\xi\right| \\
&\le C\int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha_x p(x, D)\hat{f}(\xi)|\, d\xi \\
&\le C_{\alpha,0}\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^d \left|\hat{f}(\xi)\right|\, d\xi \\
&\le C_{\alpha,0}\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^{-n-1}\, d\xi\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|(1 + |x|)^{d+n+1}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die verlangte Stetigkeit. □

Sei

$$S^{-\infty} = \bigcap_{d\in\mathbb{R}} S^d.$$

Die Operatoren $p(x, D)$ mit $p \in S^{-\infty}$ werden **Glaettungsoperatoren** genannt. Wir schreiben Ψ^d fuer die Menge der Pseuddifferentialoperatoren von Ordnung d.

Lemma 2.5 (Peetre Ungleichung)**.** *Sei $s \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$(1 + |x + y|)^s \le (1 + |y|)^s\, (1 + |x|)^{|s|}\, .$$

Beweis. Sei zunaechst $s \ge 0$. Aus

$$(1 + |x + y|) \le (1 + |x| + |y|) \le (1 + |x|)(1 + |y|)$$

erhalten wir die Behauptung nach Anwendung der monoton wachsenden Funktion

$u \mapsto u^s$. Sei nun $s < 0$, dann schreibe $y = (x + y) - x$ und erhalte aus obigem

$$(1 + |y|)^{-s} \leq (1 + |x + y|)^{-s}(1 + |x|)^{-s}. \qquad \square$$

Lemma 2.6. *Sei $p \in S^d$ und $P = p(x, D)$, dann gilt fuer $f \in \mathcal{S}$, dass*

$$|Pf|_{s-d} \leq C|f|_s.$$

Daher setzt P zu einem stetigen Operator $H_s \to H_{s-d}$ fort.

Beweis. Es gilt $Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x, \xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi$, also

$$\begin{aligned}\widehat{Pf}(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi-\zeta\rangle} p(x, \xi)\hat{f}(\xi)\, d\xi\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi-\zeta\rangle} p(x, \xi)\, dx}_{=q(\zeta-\xi,\xi)}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi,\end{aligned}$$

wobei $q(\zeta, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\zeta\rangle} p(x, \xi)\, dx$ und das Integral konvergiert absolut, da $p(x, \xi)$ kompakten Traeger in x hat. Nach Lemma 1.16 gilt $|Pf|_{s-d} = \sup_{g\in\mathcal{S}\smallsetminus\{0\}} \frac{|(Pf,g)|}{|g|_{d-s}}$. Es gilt

$$(Pf, g) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} q(\zeta - \xi, \xi)\hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\zeta)}\, d\xi\, d\zeta.$$

Sei

$$K(\zeta, \xi) = q(\zeta - \xi, \xi)(1 + |\xi|)^{-s}(1 + |\zeta|)^{s-d}.$$

Nach der Cauchy-Schwarz-Abschaetzung gilt

$$\begin{aligned}|(Pf, g)| \leq &\left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(\zeta, \xi)||\hat{f}(\xi)|^2(1 + |\xi|)^{2s}\, d\xi\, d\zeta\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K(\zeta, \xi)||\hat{g}(\zeta)|^2\, (1 + |\zeta|)^{2d-2s}\; d\xi\, d\zeta\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Es reicht daher zu zeigen

$$\int_{\mathbb{R}^n} |K(\zeta, \xi)|\, d\xi \leq C \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} |K(\zeta, \xi)|\, d\zeta \leq C.$$

Es gilt

$$|D_x^\alpha p(x, \xi)| \leq C_\alpha\, (1 + |\xi|)^d$$

und daher

$$
\begin{aligned}
|\zeta^\alpha q(\zeta,\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x,\zeta\rangle} D_x^\alpha p(x,\xi)\, dx \right| \\
&\leq C_\alpha \, (1+|\xi|)^d \underbrace{\mathrm{vol}(\mathrm{supp}(p))}_{=V}
\end{aligned}
$$

Fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ ist damit

$$
|q(\zeta,\xi)| \leq C_k V (1+|\xi|)^d \, (1+|\zeta|)^{-k}
$$

und also

$$
|K(\zeta,\xi)| \leq V C_k \, (1+|\xi|)^{d-s} \, (1+|\zeta|)^{s-d} \, (1+|\xi-\zeta|)^{-k}\,.
$$

Fuer k hinreichend gross folgt die Behauptung, wenn man die Peetre-Ungleichung benutzt. □

Sei $P : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ein stetiger Operator. Ein Operator $P^* : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ heisst **adjungiert** zu P, falls fuer $f, g \in \mathcal{S}$ gilt

$$
\langle Pf, g\rangle = \langle f, P^* g\rangle\,,
$$

wobei hier das $L^2(\mathbb{R}^n)$-Skalarprodukt gemeint ist. Offensichtlich ist P^* durch P eindeutig bestimmt und es gilt $(P^*)^* = P$. Wir werden zeigen, dass jeder Pseudodifferentialoperator einen Adjungierten besitzt.

Definition 2.7. Zwei Symbole p, q heissen **aequivalent**, falls $p - q \in S^{-\infty}$. Ist $p \in S^{-\infty}$, so gilt $P_p(H_s) \subset H_t$ fuer alle t und also gilt nach dem Sobolev-Lemma 1.14,

$$
P(H_s) \subset \bigcap_t H_t \subset C^\infty(\mathbb{R}^n).
$$

Wir nennen P dann einen **Glaettungsoperator**.

Definition 2.8 (Asymptotische Entwicklung)**.** Gegeben seien Symbole $p_j \in S^{d_j}$ mit $d_j \to -\infty$. Wir schreiben

$$
p \sim \sum_{j\in\mathbb{N}} p_j,
$$

falls fuer jedes $d \in \mathbb{R}$ ein $k(d) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass fuer $k \geq k(d)$ gilt

$$
p - \sum_{j=1}^{k} p_j \in S^d.
$$

Beachte, dass die Summe $\sum_j p_j$ nicht zu konvergieren braucht.

Definition 2.9. Ein **matrixwertiges Symbol** vom Rang $k \in \mathbb{N}$ und Ordnung $d \in \mathbb{R}$ ist eine Abbildung $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{M}_{k\times k}(\mathbb{C})$ derart, dass jeder Eintrag p_{ij} ein Symbol der Ordnung d ist.

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^k$ eine vektorwertige Funktion und p ein matrixwertiges Symbol. Dann definiert

$$p(x,D)f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

einen linearen Operator $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^k) =: \mathcal{S}^k \to \mathcal{S}^k$. Dieser laesst sich fortsetzen zu einem stetige Operator $H_s(\mathbb{R}^n\mathbb{C}^k) =: H^k_s \to H^k_{s-d}$. Sei $\Psi^k_d(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller Pseudodifferentialoperatoren von Ordnung d und Rang k, sowie $\Psi_d(\mathbb{R}^n) = \Psi^1_d(\mathbb{R}^n)$.

Lemma 2.10. *Sei $r(x,\xi,y)$ eine matrixwertige C^∞-Funktion mit*

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi D^\gamma_y r| \le C_{\alpha,\beta,\gamma}\,(1+|\xi|)^{d-|\beta|}\,.$$

Fuer $f \in \mathcal{S}^k$ mit Traeger in der beschraenkten offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ sei

$$Rf(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\left\langle x-y,\xi\right\rangle} r(x,\xi,y)f(y)\,dy\,d\xi.$$

Sei $U' \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschraenkt mit $\overline{U} \subset U'$. Dann existiert ein Symbol $p \in S^d(U')$ mit Operator P so dass $R(f)|_U = P(f)|_U$ fuer alle $f \in \mathcal{S}^k$ mit Traeger in U. Das Symbol p von P ist aequivalent zu $\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi D^\alpha_y r(x,\xi,y)\Big|_{x=y}$.

Beachte: P haengt von U und U' ab.

Beweis. Da wir nur Funktionen f mit Traeger in U betrachten, koennen wir $r(x,\xi,y)$ durch

$$r(x,\xi,y)\psi(y)\psi(x)$$

ersetzen, wobei $\psi \in C^\infty_c(U')$ eine Funktion mit $\psi \equiv 1$ auf U ist. Das Integral ueber y ist die Fourier-Transformation eines Produktes und damit die Faltung der Fourier-Transformierten, also gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\left\langle y,\xi\right\rangle} r(x,\xi,y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} q(x,\xi,\xi-\zeta)\hat{f}(\zeta)\,d\zeta$$

mit

$$q(x,\xi,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\left\langle y,\zeta\right\rangle} r(x,\xi,y)\,dy$$

Setze

$$p(x,\zeta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi-\zeta\rangle} q(x,\xi,\xi-\zeta)\,d\xi.$$

Dann liefert die Vertauschung der Integrationsreihenfolge die Behauptung. Diese muss allerdings gerechtfertigt werden. Beachte hierzu das folgende: Fuer $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|q(x,\xi,\zeta)| \leq C_k(1+|\xi|)^d(1+|\zeta|)^{-k}$$

und

$$|\hat{f}(\zeta)| \leq C_k(1+|\zeta|)^{-k},$$

also

$$|q(x,\xi,\xi-\zeta)\hat{f}(\zeta)| \leq C_k(1+|\xi|)^d(1+|\xi-\zeta|)^{-k}(1+|\zeta|)^{-k}.$$

Schreibe $\xi = (\xi-\zeta)+\zeta$ und benute die Peetre-Ungleichung um zu sehen, dass dies $\leq$

$$C_k(1+|\xi-\zeta|)^{d-k}(1+|\zeta|)^{|d|-k}$$

ist. Fuer $k >> 0$ ist dies integrierbar. □

Definition 2.11. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschraenkt und sei $\Psi_d(U)$ die Menge der Operatoren

$$R : C_c^\infty(U) \to C_c^\infty(U)$$

so dass ein Pseudodofferentialoperator P mit Symbol p der Ordnung d auf U existiert so dass $R = P|_{C_c^\infty(U)}$.

Lemma 2.12. *Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschraenkt und offen, $P \in \Psi_d(U)$, sowie $Q \in \Psi_l(U)$.*

(a) *Sei $U' \subset \mathbb{R}^n$ beschraenkt und offen mit $\overline{U} \subset U'$, dann gibt es einen Operator $P^* \in \Psi_d(U')$ mit $(Pf,g) = (f,P^*g)$ fuer alle $f \in C_c^\infty(U)$ und $g \in C_c(U')$. Es gilt $\sigma(P^*) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{p(x,\xi)}$.*

(b) *$PQ \in \Psi_{d+l}(U)$ mit*

$$\sigma(PQ) \sim \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi p\, D_x^\alpha q.$$

Beweis. Mit

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

rechnen wir

$$\begin{aligned}\langle Pf, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi\,\overline{g(x)}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\overline{p(x,\xi)}g(x)\,dx}\,\hat{f}(\xi)\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\zeta)\overline{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x-\zeta,\xi\rangle}\overline{p(x,\xi)}g(x)\,dx\,d\xi}\,d\zeta\\ &= \langle f, P^* g\rangle,\end{aligned}$$

mit

$$P^* g(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle}\overline{p(y,\xi)}g(y)\,dy\,d\xi.$$

Da $\operatorname{supp}(p)\subset K\times\mathbb{R}^n$, kann man hier g mit groesserem Traeger zulassen. Hiermit folgt die Behauptung aus Lemma 2.10.

(b) Aus

$$Q^* g(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle}\overline{q(y,\xi)}g(y)\,dy\,d\xi$$

folgt nach Fourier-Inversionsformel

$$\widehat{Q^* g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}\overline{q(y,\xi)}g(y)\,dy.$$

Sei q^* das Symbol von Q^*. Man kann Q und Q^* vertauschen und erhaelt

$$\widehat{Qg}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}\overline{q^*(y,\xi)}g(y)\,dy,$$

also

$$\begin{aligned}PQg(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\widehat{Qg}(\xi)\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x,\xi\rangle}p(x,\xi)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle y,\xi\rangle}\overline{q^*(y,\xi)}g(y)\,dy\,d\xi\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung mit Lemma 2.10. □

Lemma 2.13. *Sei $K(x,y)$ eine glatte Funktion mit Traeger in $U\times\mathbb{R}^n$, wobei U relativ kompakt in $\mathbb{R}^n$ liegt. Der Operator*

$$P_K f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y)f(y)\,dy$$

liegt in $\Psi^{-\infty}(U)$. Umgekehrt hat jeder Glaettungsoperator in $\Psi_{-\infty}(U)$ einen glatten Kern.

Beweis. Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\,dx = 1$. Setze

$$r(x,\xi,y) = e^{2\pi i \langle y-x,\xi\rangle}\psi(\xi)K(x,y),$$

dann gilt

$$P_K f(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} r(x,\xi,y) f(y)\,dy\,d\xi.$$

Mit Lemma 2.10 folgt die Behauptung. Fuer die Rueckrichtung sei $p \in S^{-\infty}(U)$, dann gilt

$$Pf(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} p(x,\xi) f(y)\,dy\,d\xi.$$

Mit

$$K(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} p(x,\xi)\,d\xi$$

folgt die Behauptung. □

Lemma 2.14. *Sei d_j eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $d_j \searrow -\infty$ fuer $j \to \infty$. Sei $p_j \in S^{d_j}(U)$. Dann existiert ein Symbol $p \in S^{d_1}(U')$ fuer eine Umgebung $U' \supset \overline{U}$ so dass*

$$p \sim \sum_j p_j.$$

Beweis. Wir koennen $d_1 > d_2 > d_3 > \ldots$ annehmen. Es gilt $\operatorname{supp}(p_j) \subset U \times \mathbb{R}^n$. Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ eine glatte Funktion mit

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= 0 \qquad && |\xi| \leq 1, \\ \phi(\xi) &= 1 && |\xi \geq 2. \end{aligned}$$

Sei $t_j > 0$ mit $t_j \to 0$. Die Summe

$$p(x,\xi) = \sum_j \phi_j(t_j\xi)p_j(x,\xi)$$

konvergiert lokal-gleichmaessig. Das Symbol p erfuellt die Behauptung. □

Lemma 2.15. *Sei $r(x,\xi,y)$ ein Kern wie in Lemma 2.10 mit Traeger in $U \times \mathbb{R}^n \times V$ mit $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \cap V = \emptyset$ und U relativ kompakt. Dann ist der durch r definierte Operator R in $\Psi^{-\infty}(U)$.*

Beweis. Es ist

$$Rf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x-y,\xi \rangle} r(x,\xi,y) f(y)\, dy\, d\xi.$$

Auf dem Traeger von r gilt $|x-y| \geq \varepsilon$ fuer ein $\varepsilon > 0$. Sei $\Delta_\xi = \sum_j D^2_{\xi_j}$ der Laplace-Operator. Es gilt

$$\Delta_\xi e^{2\pi i \langle x-y,\xi \rangle} = |x-y|^2 e^{2\pi i \langle x-y,\xi \rangle}.$$

Mit partieller Integration erhaelt man

$$Rf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x-y,\xi \rangle} |x-y|^{-2k} \Delta^k_\xi r(x,\xi,y) f(y)\, dy\, d\xi.$$

Fuer $k >> 0$ is $\Delta^k_\xi r(x,\xi,y)$ schnell fallend, wir koennen dann die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhalten

$$Rf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x-y,\xi \rangle} \Delta^k_\xi r(x,\xi,y)\, d\xi\, |x-y|^{-2k}}_{\text{glatt}} f(y)\, dy. \qquad \square$$

Lemma 2.16. *Sei $P \in \Psi_d(U)$, $U' \subset U$ offen $f \in H_s$ mit $f|_{U'}$ glatt. Dann ist $Pf|_{U'}$ glatt. Man sagt: P ist* **pseudolokal**.

Beweis. Sei $x \in U'$ und waehle $\phi \in C^\infty_c(U')$ konstant 1 in einer Umgebung von x. Sei $\psi \in C^\infty_c(U')$ mit $\operatorname{supp} \psi \subset \{y : \phi(y) = 1\}$. Wir zeigen dass $\psi P f$ glatt ist. Es gilt

$$\psi P f = \psi P \phi f + \psi P(1-\phi) f.$$

Nun ist ϕf glatt, also ist der erste Summand glatt. Der zweite Summand hat einen Kern wie in Lemma 2.15. □

3 PseudoDO auf Mannigfaltigkeiten

Sei $P \in \Psi^d(U)$, $K \subset U$ kompakt. Wir sagen P ist **glaettend auf** K, falls es eine Umgebung $U_1 \subset U$ von K gibt, so dass $Pf \in C^\infty(U)$ fuer jedes $f \in H_s$ mit supp $f \subset U_1$. In diesem Fall schreiben wir

$$P \in \Psi^{-\infty}|_K.$$

Lemma 3.1. *Sei$K \subset U$ kompakt und seien $p \in S^d(U)$, $q \in S^{-d}(U)$ Symbole. Die Bedingungen*

(i) $PQ - \mathrm{Id} \in \Psi^{-\infty}|_K$

(ii) $QP - \mathrm{Id} \in \Psi^{-\infty}|_K$

sind aequivalent. In diesem Fall ist q modulo $\Psi^{-\infty}$ durch q bestimmt. Die schwaechere Bedingung

(iii) $PQ - \mathrm{Id} \in \Psi^{-1}|_K$

impliziert dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt so dass

(iv) $|p(x,\xi)| > c|\xi|^d$ *fuer* $|\xi| > C$, $x \in K$.

Umgekehrt gelte (iv). *Dann existiert $q \in S^{-d}$ so dass* (i), (ii) *und* (iv) *gelten.*

Ein Symbol p heisst **elliptisch**, wenn es (iv) erfuellt.

Ein Operator Q, der (i) oder (ii) erfuellt, heisst **Parametrix** zu P.

Ein Differentialoperator $D = \sum_\alpha a_\alpha(x) D_x^\alpha$ der Ordnung d ist genau dann elliptisch, wenn fuer sein Hauptsymbol

$$\sigma_D^H(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=d} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

gilt $\sigma_D^H(x,\xi) \neq 0$ fuer $\xi \neq 0$, $x \in K$.

Beweis. Die asymptotische Entwicklung aus Lemma 2.12 zeigt die Aequivalenz von (i) und (i) und damit implizieren beide (iii).

Gilt (iii), dann gilt nach derselben Entwicklung

$$|p(x,\xi)q(x,\xi) - 1| < \frac{1}{2}$$

fuer $|\xi| > C$, also

$$\frac{1}{2} < |p(x,\xi)q(x,\xi)| < C'|p(x,\xi)||\xi|^{-d}$$

fuer $|\xi| > C$. Damit folgt (iv).

Umgekehrt gelte (iv). Nach Abdaempfen moeglicher Pole findet man ein Symbol $q(x,\xi)$ mit

$$q(x,\xi) = \frac{1}{p(x,\xi)}$$

fuer $|xi| > C$. Damit folgt (iii). Nimm nun an es gelte (iii) und setze $R = \mathrm{Id} - PQ \in \Psi^{-1}(U)$. Setze

$$Q_k = QR^k \in \psi^{-d-k}(U).$$

Da alle Q_k Traeger in einem festen Kompaktum $K \subset U$ haben, existiert nach Lemma 2.14 ein Symbol $Q' \sim \sum_{k \geq 0} Q_k \in \Psi^{-d}(U)$. Damit folgt

$$PQ' - \mathrm{Id} = P\left(Q' - \sum_{j=0}^{k-1} Q_j\right) + \sum_{j=0}^{k-1} PQR^j - \mathrm{Id}.$$

Nun ist

$$\sum_{j=0}^{k-1} PQR^j - \mathrm{Id} = \sum_{j=0}^{k-1} (\mathrm{Id} - R)R^j - \mathrm{Id} = R^k \in \Psi^{-k}.$$

Also ist $PQ' - \mathrm{Id} \in \Psi^{-k}$ fuer jedes k und es folgt die Behauptung mit Q' statt Q. □

Lemma 3.2. *Sei $P \in \Psi^d(U)$ elliptisch auf $K \subset U$.*

(a) *Dann ist P* **hypoelliptisch** *auf K, d.h. ist $f \in H_s$ und ist Pf glatt in einer Umgebung von K, dann ist f glatt in einer Umgebung von K.*

(b) *(Gardings Ungleichung) Es gibt ein* $C > 0$ *so dass*

$$|f|_d \leq C\left(|f|_0 + |Pf|_0\right)$$

fuer jedes $f \in C_c^\infty(\mathring{K})$.

Beweis. Sei f wie in (a) und sei $U' \subset U$ eine Umgebung von K auf der Pf glatt ist und die Bedingungen (i) und (ii) von Lemma 3.1 ueber U' erfuellt sind. Sei $\phi \in C_c^\infty(U')$. Es gilt

$$\phi f = \underbrace{(1 - QP)\phi f}_{\text{glatt}} + \phi Q \underbrace{P(\phi f)}_{\text{glatt auf } U'}$$

Da Q pseudolokal ist, folgt dass ϕf glatt ist und da ϕ beliebig ist, ist f glatt auf U'.

(b) Waehle $\phi \in C_c^\infty(U')$ mit $\phi \equiv 1$ auf K. Fuer $f \in C_c^\infty(\mathring{K})$ gilt

$$\begin{aligned} |f|_d = |\phi f|_d &= |\phi(1 - QP)f + \phi QPf|_d \\ &\leq |\phi(1 - PQ)f|_d + |\phi QPf|_d \\ &\leq C|f|_0 + C|Pf|_0, \end{aligned}$$

da einerseits $\phi(1 - QP)$ ein Glaettungsoperator, also stetig als Operator von $H_0 \to H_d$ ist und andererseits ϕQ ein stetiger Operator von $H_0 \to H_d$ ist. □

Definition 3.3. Sei $h : U \to \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Definiere dann $h^* : C^\infty(\tilde{U}) \to C^\infty(U)$ durch $h^* f = f \circ h$. ferner definiere $h_* : \mathrm{Lin}(C^\infty(U)) \to \mathrm{Lin}(C^\infty(\tilde{U}))$ durch

$$h_* T = (h^{-1})^* T h^*.$$

Lemma 3.4. *Sei $h : U \to \tilde{U}$ ein Diffeomorphismus.*

(a) *Ist $P \in \Psi^d(U)$, dann ist $h_* P \in \Psi^d(\tilde{U})$. Es gilt*

$$\sigma_{h_* P}(x, \xi) - p(h(x), dh(x)^t \xi) \in S^{d-1},$$

wobei dh das Differential von h ist.

(b) *Sei $K \subset U$ kompakt. Dann existiert $C > 0$ so dass*

$$|h^* f|_d \leq C|f|_d$$

falls $f \in C_c^\infty(h(\mathring{K}))$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x - y, \xi \rangle} p(x, \xi) f(y)\, dy\, d\xi \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}
h_* P(f)(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle h(z)-y, \xi \rangle} p(h(z), \xi) f(h^{-1}(y))\, dy\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \det(dh^{-1}(y)) \right| \, e^{2\pi i \langle h(z-h(y), \xi \rangle} p(h(z), \xi) f(y)\, dy\, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle h(z)-h(y), dh(y)^t \xi \rangle} p(h(z), dh(y)^t \xi)\, f(y)\, dy\, d\xi.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.10 folgt die Behauptung (a).

(b) Da $|dh|$ gleichmaessig beschraenkt auf K, folgt $f|_0 \leq C|h^* f|_0 \leq C^2 |f|_0$ fuer ein $C > 0$. Sei P ein elliptischer Operator von der Ordnung $d \geq 0$, dann ist

$$\begin{aligned}
|h^* f|_d &\leq C(|h^* f|_0 + |Ph^* f|_0) \\
&\leq C(|f|_0 + |h_* P f|_0) \\
&\leq C|f|_d.
\end{aligned}$$

Der Fall $d < 0$ folgt durch Dualisieren, denn (b) besagt die Stetigkeit des linearen Operators h^* auf H_s, damit ist sein Dual auch stetig auf dem Dualraum H_{-s}. Dieses Dual ist aber durch $dh \cdot h^{-1}$ gegeben und $\|dh\|$ ist nach unten und oben beschraenkt. □

Definition 3.5. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, die wir stets als zusammenhaengend annehmen. Eine lineare Abbildung $P : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ heisst **Pseudodifferentialoperator** der Ordnung d, falls fuer jede Koordinatenabbildung

$$M \supset V \xrightarrow{v} \mathbb{R}^n$$

und alle $\phi, \psi \in C_c^\infty(V)$ gilt, dass der Operator $\tilde{P} = (v^{-1})^*(\phi P \psi) v^*$ in $\Psi^d(\mathbb{R}^n)$ liegt.

$$\begin{array}{ccc}
C_c^\infty(V) & \xrightarrow{P} & C_c^\infty(V) \\
\cong\downarrow & & \downarrow\cong \\
C_c^\infty(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tilde{P}} & C_c^\infty(\mathbb{R}^n)
\end{array}$$

P heisst **elliptisch**, falls in dieser Situation $\phi P \psi$ ellitisch ist auf $\{\phi(x)\psi(x) \neq 0\}$ fuer jede Wahl von V, ϕ, ψ.

Sei T^*M das Cotangentialbuendel von M und sei $S^d(T^*M)$ die Menge aller glatten Abbildungen $p : T^*M \to \mathbb{C}$ so dass

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{d - |\beta|}$$

fuer alle Multiindizes α, β gilt, wobei (x, ξ) lokale Koordinaten von T^*M sind, $(x, \xi) \in U \times \mathbb{R}^n$.

Sei $x \in M$, $\phi \in C_c^\infty(V)$, wobei V eine Kartenumgebung von x ist, $\phi \equiv 1$ in einer Umgebung von x. Der Operator $\phi P \phi$ have bei x das Symbol $p(x, \xi)$. Die Klasse von p in $S^d(T^*M)/S^{d-1}(T^*M)$ in x haengt nicht von V, ϕ ab. Sei

$$\sigma_P^H \in S^d(T^*M)/S^{d-1}(T^*M)$$

das **Hauptsymbol** von P.

Im Folgenden werden viele Konstruktionen lokal sein, d.h., von lokalen Karten abhaengen. Wir werden sie dennoch global hinschreiben, immer im Hinterkopf habend, dass wir uns eine Kartenueberdeckung mit einer Teilung der Eins hinzudenken.

Lemma 3.6. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $P \in \Psi^d(M)$, $Q \in \Psi^l(M)$.*

(a) *Bezueglich des Skalarproduktes*

$$(f, g) = \int_M f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

hat P einen Adjungierten $P^* \in \Psi^d(M)$. Es gilt $\sigma^H(P^*) = \overline{\sigma^H(P)}$.

(b) *Es ist $PQ \in \Psi^{d+l}(M)$ mit $\sigma^H(PQ) = \sigma^H(P)\sigma^H(Q)$.*

Beweis. Man benutzt eine Teilung der Eins um die lokalen Ergebnisse hochzuziehen. □

Sei $\mathcal{V} = (V_i, \alpha_i, v_i)$ ein endlicher Atlas mit einer unterliegenden Zerlegung der Eins $1 = \sum_i v_i$. Fuer $f \in C^\infty(M)$ sei dann

$$|f|_s^{\mathcal{V}} := \sum_i |\alpha_i^{-*} v_i f|_s.$$

Lemma 3.7. *Ist $\mathcal{V}' = (V_j', \beta_j, v_j')$ ein weiter endlicher Atlas mit Zerlegung der Eins, so gibt es $C > 0$ so dass fuer alle $f \in C^\infty(M)$ gilt*

$$|f|_s^{\mathcal{V}} \leq C|f|_s^{\mathcal{V}'}.$$

Beweis. Wir rechnen

$$\begin{aligned} |f|_s^{\mathcal{V}} &= \sum_i |\alpha_i^{-*} v_i f|_s \\ &\le \sum_{i,j} |\alpha_i^{-*} v_i v_j' f|_s \\ &\le C_1 \sum_{i,j} |\beta_j^{-*} v_i v_j' f|_s \\ &\le C \sum_j |\beta_j^{-*} v_j' f|_s = C |f|_c^{\mathcal{V}'}, \end{aligned}$$

wobei einerseits Lemma 3.4 (b) und andereseits die Tatsache benutzt wurde, dass die Multiplikation mit v_i ein Pseudodifferentialoperator der Ordnung 0 ist. □

Definition 3.8. Sei M eine kompakte Mannigfaltigkeit. Der **Sobolev-Raum** $H_s(M)$ ist definiert als die Vervollstaendigung von $C^\infty(M)$ nach der Norm $|.|_s^{\mathcal{V}}$ fuer ein $\mathcal{V}$ wie oben.

Lemma 3.9. (a) *Die duale Paarung $H_s(M) \times H_{-s}(M) \to \mathbb{C}$, $(f, g) = \int_M f(x)g(x)\,dx$ ist stetig und perfekt.*

(b) *Die Inklusion $H_s(M) \to H_t(M)$ fuer $s > t$ ist kompakt.*

(c) *Ist $P \in \Psi^d(M)$ dann induziert P einen stetigen Operator $P : H_s(M) \to H_{s-d}(M)$.*

(d) *Ist $P \in \Psi^d(M)$ elliptisch, dann existiert ein $Q \in \Psi^{-d}(M)$ so dass $PQ - 1, QP - 1 \in \Psi^{-\infty}(M)$. Ferner ist P hypoellitisch.*

Beweis. Diese Aussagen zieht man alle mit einer Teilung der Eins aus den lokalen Aussagen hoch. □

Glaettungsoperatoren

Lemma 3.10. *Ist M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $T : C^\infty(M) \to H_0(M)$ setzt fort zu einem stetigen Operator $H_s \to H_t$ fuer alle s, t, dann hat T einen glatten Kern $k \in C^\infty(M \times M)$ so dass*

$$Tf(x) = \int_M k(x, y) f(y)\,dy$$

gilt. Insbesondere ist $T \in \Psi^{-\infty}(M)$.

Beweis. Seien $s, t \in \mathbb{R}$ und sei $f \in H_t$. Dann ist $e \mapsto \langle Te, f\rangle$ ein stetiges lineares Funktional, also gegeben durch ein $k_f(y)$, d.h. $\langle Te, f\rangle = \int_M k_f(y)e(y)\,dy$. Laesst man s wachsen, sieht man, dass $k_f(y)$ glatt ist und fuer gegebenes $y \in M$ ist die Abbildung

$f \mapsto k_f(y)$ ebenfalls stetig, also gegeben durch eine Funktion $k(x, y)$, d.h. $k_f(y) = \int_M k(x, y) f(x)\, dx$. Man variiert s und t und stellt fest, dass k glatt ist. Dann wendet man Lemma 2.13 an. □

4 Spektralgeometrie

Sei H ein Hilbertraum und $\mathcal{B}(H)$ die Algebra der beschraenkten Operatoren auf H. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ heisst **normal**, falls $TT^* = T^*T$ gilt und er heisst **kompakt**, falls er beschraenkte Mengen auf relativ kompakte wirft. Ein Operator T ist genau dann kompakt, wenn fuer jede beschraenkte Folge v_n in H die Bildfolge $T(v_n)$ eine konvergente Teilfolge hat. Die Menge $\mathcal{K}$ der kompakten Operatoren auf H ist ein Ideal in $\mathcal{B}(H)$, d.h. Ist T kompakt und S stetig, so sind ST und TS kompakt.

Satz 4.1 (Spektralsatz fuer kompakte normale Operatoren)**.** *Ist T kompakt und normal, so hat T hoechstens abzaehlbar viele Eigenwerte $\lambda_n \neq 0$, die sich nur in Null haeufen koennen. Jeder Eigenwert $\neq 0$ hat endliche Vielfachheit. Man hat eine Orthogonalzerlegung*

$$H = \ker(T) \oplus \bigoplus_n \mathrm{Eig}(T, \lambda_n).$$

Satz 4.2 (Arzela-Ascoli)**.** *Sei X ein metrischer Raum, der eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt. Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen auf X. Falls*

- *die Folge in jedem Punkt gleichgradig stetig ist und*
- *für jedes $x \in X$ die Folge der Werte $f_n(x) \in \mathbb{C}$ beschränkt ist,*

dann besitzt (f_n) eine lokal-gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Proposition 4.3. *Sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $T : L^2(M) \to C^1(M) \subset L^2(M)$ stetig. Dann ist T als Operator auf $L^2(M)$ kompakt.*

Beweis. Sei f_n eine beschraenkte Folge in $L^2(M)$ und $g_n = T(f_n)$. Dann sind die Ableitungen der g_n beschraenkt und nach dem Mittelwertsatz ist die Folge g_n gleichgradig stetig. Ferner sind die Werte beschraenkt, also hat die Folge g_n eine lokal-gleichmaessig konvergente Teilfolge $g_{n_k} \to g$. Da M kompakt ist, konvergiert die Folge schon gleichmaessig auf M, also konvergiert sie auch in $L^2(M)$. □

Definition 4.4. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(H)$ heisst **Spurklasse-Operator**, falls die

Spurnorm

$$\|T\|_{\mathrm{tr}} := \sup_{(e_i),(f_i)} \sum_{i \in I} |\langle Te_i, f_i\rangle|$$

endlich ist. Hier wird das Supremum ueber alle ONB (e_i) und (f_i) erstreckt.

In diesem Fall haengt die **Spur**

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_i \langle te_i, e_i\rangle$$

nicht von der Wahl der ONB (e_i) ab. Die Spurklasse-Operatoren bilden ein Ideal in $\mathcal{B}(H)$.

Ist T selbstadjungiert und positiv definit, dann ist T schon Spurklasse, falls $\sum_i \langle Te_i, e_i\rangle < \infty$ fuer eine ONB gilt.

Lemma 4.5. *Ist $T : L^2(M) \to C^{2n}(M)$ stetig mit $2n > \dim M$, so ist T als Operator auf $L^2(M)$ von Spurklasse.*

Beweis. Sei (v_i) eine Teilung der Eins, also $T = \sum_{i,j} v_i T v_j = \sum_{i,j} T_{i,j}$. Wir zeigen, dass jedes $T_{i,j}$ von Spurklasse ist. Durch Verwendung von $\mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$-wertigen Karten kann man $M = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ annehmen. Fuer $k \in \mathbb{Z}^m$ sei $e_k(x) = e^{2\pi i\langle x,k\rangle}$, so bilden die e_k eine ONB von $L^2(M)$. Sei Δ der Laplace-Operator, so normalisiert, dass $\Delta e_k = \|k\|^2 e_k$ gilt. Damit ist der Operator $(1+\Delta)^{-n}$, der e_k auf $(1+\|k\|)^{-2n} e_k$ wirft, stetig. Wegen $\langle \Delta f, f\rangle = \langle df, df\rangle$ ist Δ positiv definit und daher ist der Operator $(1+\Delta)^{-n}$ stetig und positiv definit. Da $2n > m$, folgt $\sum_k \frac{1}{(1+\|k\|)^{2n}} < \infty$ und daher ist $(1+\Delta)^{-n}$ von Spurklasse. Da der Operator $(1+\Delta^n T$ stetig ist, ist

$$T = (1+\Delta)^{-n} \left((1+\Delta)^n T\right)$$

von Spurklasse. □

Sei $T : \mathrm{Dom}(T) \to H$ ein dicht definierter Operator. T heisst **abgeschlossen**, falls Graph $G(T)$ als Teilmenge von $H \times H$ abgeschlossen ist. Er heisst **abschliessbar**, falls der Abschluss $\overline{G(T)}$ ein Graph ist. Weiter heisst T **symmetrisch**, falls

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, Tw\rangle$$

fuer alle $v, w \in \mathrm{Dom}(T)$ gilt. Schliesslich heisst T **selbstadjungiert**, falls T abgeschlossen ist und $T = T*$ erfuellt, wobei

$$\mathrm{Dom}(T^*) = \left\{ w \in H : v \mapsto \langle Tv, w\rangle \ \text{ stetig auf } \ \mathrm{Dom}(T) \right\}$$

ist. Der Operator T^* ist dann durch die Gleichung $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ definiert. Schliesslich heisst T **wesentlich selbstadjungiert**, falls T abschliessbar ist und der Abschluss $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.

Definition 4.6. Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{A}$ die Borel-σ-Algebra auf X und sei H ein Hilbert-Raum. Ein **Spektralmaß** ist ein Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(X) = \mathrm{Id}$.

(b) Jedes $\mu(A)$ ist eine Orthogonalprojektion.

(c) $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$.

(d) Ist $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(e) Für all $v, w \in H$ ist die Funktion

$$\mu_{v,w}(A) = \langle \mu(A)v, w\rangle$$

ein $\mathbb{C}$-wertiges Radon-Maß definiert auf der σ-Algebra $\mathcal{A}$.

Erste Eigenschaften

- Für jedes $v \in H$ gilt

$$\mu_{v,v}(A) = \langle \mu(A)v, v\rangle = \langle \mu(A)v, \mu(A)v\rangle = \left\|\mu(A)v\right\|^2,$$

so dass $\mu_{v,v}$ ein positives Radon-Maß ist mit

$$\mu_{v,v}(X) = \|v\|^2.$$

Durch Polarisieren erhaelt man hieraus

$$\mu_{v,w}(X) = \langle v, w\rangle.$$

Ebenso liefert die Polarisierung

$$\mu_{v,w}(A) \in [0,1]\,\langle v, w\rangle$$

fuer jede messbare Teilmenge $A \subset X$. Das bedeutet, dass eine komplexe Zahl ε von Betrag 1 existiert, so dass $|\mu_{v,w}| = \varepsilon\mu_{v,w}$ ein positives Radon-Mass ist.

- Je zwei Projektionen $\mu(A)$ und $\mu(B)$ kommutieren miteinander.

- Ist $A \cap B = \emptyset$, so stehen die Bilder von $\mu(A)$ und $\mu(B)$ senkrecht aufeinander, d.h. es gilt $\mu(A)\mu(B) = 0$.

Beispiele 4.7.
- Sei $T : H \to H$ ein selbstadjungierter Operator auf dem endlich-dimensionalen Hilbert-Raum H. Auf der Borel-σ-Algebra von $\mathbb{C}$ definieren wir
$$\mu(A) = \sum_{\lambda \in A} Pr_\lambda,$$
wobei Pr_λ die Orthogonalprojektion auf den Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ ist. Da verschiedene Eigenräume von T senkrecht aufeinander stehen, ist μ ein Spektralmaß.

- Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und für jede messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ sei $\mu(A) : H \to H$ gegeben durch
$$\mu(A)(\phi) = \mathbf{1}_A \phi.$$
Dann ist μ ein Spektralmaß.

Proposition 4.8. *Ist μ ein Spektralmaß, dann ist für jedes $v \in H$ die Abbildung*
$$A \mapsto \mu(A)v$$
ein abzählbar additives, H-wertiges Maß auf X. Mit anderen Worten, $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ ist σ-additiv, wenn wir $\mathcal{B}(H)$ mit der starken Topologie versehen.

Man beachte, dass μ als Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}(H)$ im Allgemeinen nicht σ-Additiv ist, wenn $\mathcal{B}(H)$ die Normtopologie trägt!

Beweis. Nur die σ-Additivität ist zu zeigen. Seien also $A_1, A_2, \dots$ paarweise disjunkte messbare Mengen und $A = \bigcup_j A_j$. Nach Voraussetzung ist für jedes $w \in H$,
$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\langle \mu(A_j)v, w \right\rangle = \langle \mu(A)v, w \rangle .$$
Sei $v_j = \mu(A_j)v$. Da die A_j paarweise disjunkt sind, sind die v_j paarweise orthogonal. Da
$$\begin{aligned}\sum_j \|v_j\|^2 &= \sum_j \|\mu(A_j)v\|^2 = \sum_j \left\langle \mu(A_j)v, \mu(A_j)v \right\rangle \\ &= \sum_j \left\langle \mu(A_j)v, v \right\rangle = \sum_j \mu_{v,v}(A_j) = \mu_{v,v}(A) \le \mu_{v,v}(X) = \|v\|^2 < \infty\end{aligned}$$
konvergiert die Reihe $\sum_j v_j$ in der Norm. □

Beispiel 4.9. Ein Beispiel, dass ein Spektralmass als Abbildung nach $\mathcal{B}(H)$ nicht σ-additiv ist: Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $\mu(A)(\phi) = \mathbf{1}_A\phi$. Sei $A_j = (j, j+1)$ für $j \in \mathbb{N}$ und sei $A = \bigcup_j A_j$. Dann konvergiert die Summe $\sum_j \mu(A_j)$ stark gegen $\mu(A)$ wie wir in der Proposition gezeigt haben. Sie konvergiert allerdings nicht in der Norm, denn

$$\mu(A) - \sum_{j=1}^{N} \mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{j>N} A_j\right)$$

ist eine Projektion $\neq 0$, hat also stets Norm 1.

Lemma 4.10. *Sei μ ein Spektralmaß und seien $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_j) = 0$ für jedes j. Sei $A = \bigcup_j A_j$. Dann ist $\mu(A) = 0$.*

Beweis. Für $v \in H$ gilt $\mu_{v,v}(A_j) = 0$ und daher $0 = \mu_{v,v}(A) = \langle \mu(A)v, v\rangle$. Daher ist die Projektion $\mu(A)$ gleich Null. □

Satz 4.11 (Spektralsatz fuer unbeschraenkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Sei $T : \mathrm{Dom}\, T \to H$ selbstadjungiert. Dann existiert ein Spektralmaß μ_T auf $\mathbb{R}$ so dass*

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu(\lambda).$$

Insbesondere folgt fuer $v \in \mathrm{Dom}\, T, w \in H$,

$$\langle Tv, w\rangle = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mu_{v,w}(x).$$

Beweis. Funktionalanalysis. □

Satz 4.12 (Stetiger Funktionalkalkuel)**.** *Sei $T : \mathrm{Dom}(T) \to H$ selbstadjunguiert und sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig. Sei μ_T das Spektralmaß. Definiere*

$$f(T) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) \, d\mu(\lambda).$$

Ist f beschraenkt auf $\sigma(T)$, dann ist $f(T)$ stetig mit Operatornorm $\left\|f(T)\right\|_{\mathrm{Op}} \leq \left\|f\right\|_{\mathbb{R}} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Ist g eine weitere stetige, auf $\sigma(T)$ beschraenkte Funktion, dann gilt

$$fg(T) = f(T)g(T).$$

Das heisst, die Abbildung $f \mapsto f(T)$ ist ein Algebrenhomomorphismus $C_b(\sigma(T)) \to \mathcal{B}(H)$. Insbesondere folgt: Ist $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, so ist $f(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$. Ist $|f(x)| \leq C|x|$, dann ist f auf $\mathrm{Dom}(T)$ erklaert. Hier ist $C_b(\sigma(T))$ die Algebra der beschraenkten stetigen Funktionen auf $\sigma(T)$.

Beweis. Sei f beschraenkt. Seien $a < b$ reelle Zahlen, dann gilt fuer $v, w \in H$

$$\begin{aligned} |\langle f(T)v, w\rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d\mu_{v,w}(\lambda) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d|\mu_{v,w}|(\lambda) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|\, d|\mu_{v,w}|(\lambda) \\ &\leq \left\| f \right\|_{\mathbb{R}} |\mu_{v,w}|(\mathbb{R}) = \left\| f \right\|_{\mathbb{R}} |\langle v, w\rangle|. \end{aligned}$$

Fuer $w = f(T)$ folgt nach Cauchy-Schwarz

$$\left\| f(T)v \right\|^2 \leq \left\| f \right\|_{\mathbb{R}} |\langle v, f(T)v\rangle \leq \left\| f \right\|_{\mathbb{R}} \|v\| \left\| f(T)v \right\|,$$

also

$$\left\| f(T)v \right\| \leq \left\| f \right\|_{\mathbb{R}} \|v\|.$$

Damit ist $f(T)$ stetig mit Operatornorm $\leq \left\| f \right\|_{\mathbb{R}}$.

Nun zur $fg(T) = f(T)g(T)$. Sei zunaechst $T_n = \mu([-n, n])T$, dann ist T_n stetig und $T_n \to T$ schwach konvergent. Nach Defition folgt $f(T_n) = f(T)\mu([-n, n])$ und daher $f(T_n) \to T$. Es reicht also zu zeigen $fg(T_n) = f(T_n)g(T_n)$. Diese letztere Identitaet findet sich im FA-Skript. □

Satz 4.13. *Sei $P \in \Psi^d(M)$ elliptisch $d > 0$. Ferner sei P wesentlich selbstadjungiert auf $L^2(M)$. Dann hat P Eigenwerte $\lambda_n \in \mathbb{R}$,*

$$L^2(M) = \bigoplus_n \mathrm{Eig}(P, \lambda_n),$$

jedes λ_n hat endliche Vielfachheit $m_n = \dim \mathrm{Eig}(P, \lambda_n)$ und

$$\sum_n{}' m_n |\lambda_n|^{-k} < \infty$$

falls $kd > 2N + \frac{dim(M)}{2}$ *fuer ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $N > \frac{dim(M)}{2}$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, dann ist $P - \lambda$ invertierbar und $T = (P - \lambda)^{-k} : L^2(M) \to L^2(M)$ ist stetig. Fuer $f \in \mathrm{Bild}(T)$ gilt $(P - \lambda)^k f \in L^2(M)$, also $f \in H_{kd}(M) \subset C^{2N}(M)$ nach dem Sobolev Lemma. Damit ist $T : L^2(M) \to C^{2N}(M)$ von Spurklasse. □

Satz 4.14 (Chernov). *Sei* $P \in \Psi^d(M)$ *elliptisch und symmetrisch mit* $\mathrm{Dom}(P) = C^\infty(M)$. *Dann ist P wesentlich selbstadjungiert.*

5 Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

Definition 5.1. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und E ein glattes metrisiertes Vektorbuendel ueber M. Ein linearer Operator $T : \Gamma_c^\infty(E) \to L^2(M, E)$ hat **Ausbreitungsgeschwindigkeit** $\leq R$, falls fuer $\phi \in \Gamma_c^\infty(E)$ gilt

$$\mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}(\phi)) > R \quad \Rightarrow \quad x \neq \mathrm{supp}(T\phi).$$

Beispiel 5.2. Ist T gegeben durch einen Kern $k \in L^2(M \times M)$, also $T\phi(x) = \int_M k(x, y)\phi(y)\, dy$, dann hat T Ausbreitungsgeschwindigkeit $\leq R$ falls

$$\mathrm{dist}(x, y) > R \quad \Rightarrow \quad k(x, y) = 0.$$

Definition 5.3. Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und E ein glattes Vektorbuendel ueber M. Ein Differentialoperator D auf E heisst **verallgemeinerter Laplace-Operator**, falls

$$\sigma_D^H(\xi) = -\|\xi\|^2\, \mathrm{Id}.$$

Satz 5.4. *Sei* $D \geq 0$ *ein selbstadjungierter verallgemeinerter Laplace-Operator. Dann hat fuer jedes* $t \geq 0$ *der Operator*

$$\cos(t\sqrt{D})$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit $\leq t$.

Beweis. Taylor Abschnitt 3. □

Satz 5.5. *Sei* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *eine gerade Funktion mit* $\operatorname{supp}(\hat{f}) \subset [-R, R]$ *dann hat der Glaettungsoperator* $f(\sqrt{D})$ *Ausbreitungsgeschwindigkeit* $\leq 2\pi R$.

Beweis. Es gilt

$$f(\sqrt{D}) = \int_{\mathbb{R}} \cos(2\pi t\sqrt{D})\hat{f}(t)\,dt = \int_{[-R,R]} \cos(2\pi t\sqrt{D})\hat{f}(t)\,dt. \qquad \square$$

Satz 5.6. *Sei* $f \in \mathcal{S}$ *eine beliebige gerade Funktion, dann gilt fuer den Kern* $k(x, y)$ *des Glaettungsoperators* $f(\sqrt{D})$

$$|k(x, y)| \leq \int_{\operatorname{dist}(x,y)}^{\infty} |\hat{f}(t)|\,dt.$$

Beweis. Sei $\phi_{x,n}$ eine approximative Eins im Punkte x und $\phi_{y,n}$ eine in y, so dass $\operatorname{supp}(\phi_{x,n}) \subset B_{1/n}(x)$ und ebenso fuer y. Dann konvergiert $\left\langle f\left(\sqrt{D}\right)\phi_{x,n}, \phi_{y,n}\right\rangle$ fuer $n \to \infty$ gegen $k(x, y)$. Der Betrag dieses Skalarproduktes ist aber gleich

$$\left|\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\left\langle \cos\left(t\sqrt{D}\right)\phi_{x,n}, \phi_{y,n}\right\rangle\,dt\right| \leq \int_{\operatorname{dist}(x,y)-2/n}^{\infty} |\hat{f}(t)|\,dt. \qquad \square$$

Lemma 5.7. *Sei* $P \in \Psi^d(M)$ *elliptisch fuer ein* $d > 0$. *Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$ *in der Resolventenmenge des unbeschraenkten Operators* P. *Dann ist* $R_\lambda = (P - \lambda)^{-1} \in \Psi^{-d}(M)$. *Das (lokale) Symbol von* R_λ, *sowie das Hauptsymbol haengen holomorph von* λ *ab.*

Beweis. Nach Lemma 3.1 besitzt der Operator $R = R_\lambda$ eine Parametrix, die wir mit $S = S_\lambda$ bezeichnen. Dann ist also $G = RS - 1 \in \Psi^{-\infty}$. Es folgt $1 = SR - G$ und damit

$$R^{-1} = S - GR^{-1}.$$

Man sieht leicht, dass GR^{-1} wieder ein Glaettungsoperator ist, also folgt $R^{-1} \in \Psi^{-d}$. Die holomorphe Abhaengigkeit des Operators impliziert dasselbe fuer die Symbole. □

6 Fredholm Operatoren

Sei H ein Hilbertraum und sei $\mathrm{GL}(H)$ die menge der stetigen bijektiven Operatoren $T : H \to H$. Nach dem Satz der offenen Abbildung ist jeder solche Operator T offen, also T^{-1} stetig.

Lemma 6.1. $\mathrm{GL}(H)$ *ist eine offene Teilmenge des Banachraums* $\mathcal{B}(H)$*. In dieser Topologie ist* $\mathrm{GL}(H)$ *eine topologische Gruppe.* $\mathrm{GL}(H)$ *ist wegzusammenhaengend.*

Beweis. Fuer die Offenheit reicht es zu zeigen, dass $\mathrm{GL}(H)$ eine Umgebung der Eins enthaelt. Wir zeigen, dass die den offenen Ball $B_1(1)$ enthaelt. Sei hierzu $S \in B_1(1)$, dann ist $\|1 - S\| < 1$ also konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ mit $T = 1 - S$ absolut. Es ist

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right) S = S \sum_{n=0}^{\infty} T^n = (1-T) \sum_{n=0}^{\infty} \\ = \sum_{n=0}^{\infty} T^n - \sum_{n=1}^{\infty} T^n = 1.\end{aligned}$$

Damit folgt $B_1(1) \subset \mathrm{GL}(H)$. Ist nun $T_0 \in \mathrm{GL}(H)$ beliebig, dann ist $T_0 B_1(1)$ eine offene Umgebung von T_0, die ganz in $\mathrm{GL}(H)$ liegt, also ist $\mathrm{GL}(H)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{B}(H)$. Des Weiteren beachte, dass fuer $\|T\| = \|1 - S\| < \frac{1}{2}$ folgt

$$\left\|S^{-1}\right\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$$

Ist nun $T_0 \in \mathrm{GL}(H)$ und ist T in der offenen Umgebung $T_0 B_{1/2}(1)$ von T_0, also etwa $T = T_0 S$, so folgt

$$\left\|T^{-1}\right\| = \left\|S^{-1} T_0^{-1}\right\| \le \left\|S^{-1}\right\| \left\|T_0^{-1}\right\| < 2 \left\|T_0^{-1}\right\|.$$

Ist also T_n eine Folge, die gegen T_0 konvergiert, so koennen wir $\|T_n - T_0\| < \frac{1}{2}$ annehmen und dann folgt $\left\|T_n^{-1}\right\| < 2 \|T_0\|$. Es folgt dann

$$\left\|T_n^{-1} - T_0^{-1}\right\| = \left\|T_n^{-1}(T_0 - T_n) T_0^{-1}\right\| \le \left\|T_n^{-1}\right\| \|T_n - T_0\| \left\|T_0^{-1}\right\| < 2 \left\|T_0^{-1}\right\|^2 \|T_n - T_0\|.$$

Da die rechte Seite gegen Null geht, ist die Abbildung $S \mapsto S^{-1}$ auf $\mathrm{GL}(H)$ eine stetige Abbildung. Da die Multiplikation sogar stetig ist als Abbildung $\mathcal{B}(H) \times \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$, ist $\mathrm{GL}(H)$ eine topologische Gruppe.

Schliesslich bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{GL}(H)$ wegzusammenhaengend ist. Sei $S \in \mathrm{GL}(H)$, dann ist S^*S selbstadjungiert und positiv mit Spektrum in einem Intervall $[a, b]$ fuer geeignete $0 < a < b$ in $\mathbb{R}$, also existiert nach dem stetigen Funktionalkalkuel der

Operator $|S| = \sqrt{S^*S}$, der ebenfalls selbstadjungiert ist und Spektrum in $[\sqrt{a}, \sqrt{b}]$ hat, also insbesondere selbt wieder in $\mathrm{GL}(H)$ liegt. Der Operator $U^{-1} = |S|S^{-1} \in \mathrm{GL}(H)$ ist unitaer, denn

$$\left\langle U^{-1}v, U^{-1}w\right\rangle = \left\langle \sqrt{S^*S}S^{-1}v, \sqrt{S^*S}S^{-1}w\right\rangle$$
$$= \left\langle S^{-1}v, S^*SS^{-1}w\right\rangle = \left\langle SS^{-1}v, SS^{-1}w\right\rangle = \langle v, w\rangle .$$

Es folgt also $S = U|S|$ fuer einen unitaeren Operator U. Fuer jedes $t \in [0,1]$ ist dann der Operator

$$(1-t)\mathrm{Id} + t|S|$$

strikt positiv und damit invertierbar, so dass zu zeigen bleibt, dass die Gruppe $\mathrm{U}(H)$ der unitaeren Operatoren auf H wegzusammenhaengend ist.

Sei also $U \in \mathrm{U}(H)$ und sei $S = \frac{1}{2}(U + U^*)$ der Realteil, sowie $T = \frac{1}{2i}(U - U^*)$ der Imaginaerteil. Dann sind S und T selbstadjungiert und es gilt $U = S + iT$. Sei $_+$ die Spektralprojektion $\mu_T([0,\infty))$ und $T_+ = P_+T = TP_+ = P_+TP_+$, sowie $P_- = (1-P)$ und $T_- = P_-T$. Setze ferner $U_\pm = S + iT_\pm$ dann ist H die orthogonale Summe aus $H_+ = P_+H$ und $H_- = P_-H$, diese Zerlegung ist U-stabil und $U_\pm = U|_{H_\pm}$ ist jeweils unitaer. Es reicht dann, jeweils Wege in $U(H_\pm)$ anzugeben, die $U_\pm$ mit der Eins verbinden. Fuer $t \in [0,1]$ sei $S_t = tS$ und $T_{+,t} = \sqrt{1 - S_t^2}$. Dann ist $U_{+,t} = S_t + iT_{+,t}$ unitaer, $U_{+,1} = U_+$ und $U_{+,0}$ hat Spektrum in $\{i\}$, ist also gleich iP_+. Genauso laesst sich U_- auf $-iP_-$ zusammenziehen und dann ist $t \mapsto e^{i\pi t/2}P_+ + e^{-i\pi t/2}P_-$ ein Weg, der die Summe der beiden mit der Eins verbindet. □

Definition 6.2. Sei $\mathcal{K} = \mathcal{K}(H)$ der Raum der kompakten Operatoren. Dies ist ein zweiseitiges Ideal in der Algebra $\mathcal{B}(H)$.

Sind E, F Hilbert-Raeume, so heisst ein beschraenkter Operator $T : E \to F$ ein **Fredholm-Operator**, falls $\ker(T)$ und $\mathrm{coker}(T) = F/\,\mathrm{Bild}(T)$ endlich-dimensional sind.

Lemma 6.3. *Aequivalent sind:*

(a) *T ist Fredholm,*

(b) $\ker(T)$, $\ker(T^*)$ *sind endlich-dimensional und das Bild von T ist abgeschlossen,*

(c) *es gibt einen stetigen Operator $S : F \to E$ so dass*

$$ST - 1 \quad \textit{und} \quad TS - 1$$

von endlichem Rang sind.

Beweis. (a)⇒(b): Sei $F_1 \subset F$ endlich-dimensional mit $F = \mathrm{Bild}(T) \oplus F_1$ und sei

$$\begin{aligned} T' : E \oplus F_1 &\to F, \\ e \oplus f &\mapsto Te + f. \end{aligned}$$

Der Operator T' ist linear, stetig und surjektiv, also offen. Also ist

$$F \setminus \mathrm{Bild}(T) = T'\left(E \oplus F_1 \setminus E \oplus 0\right)$$

offen, also ist $\mathrm{Bild}(T)$ abgeschlossen. Schliesslich ist

$$F = \mathrm{Bild}(T) \oplus \underbrace{(\mathrm{Bild}(T))^\perp}_{=\ker(T^*)}$$

und daher ist $\ker(T^*)$ endlich-dimensional.

(b)⇒(c): Es gilt

$$\begin{aligned} E &= \ker T \oplus (\ker T)^\perp, \\ F &= \mathrm{Bild}\, T \oplus \ker T^*. \end{aligned}$$

Also ist $T : (\ker T)^\perp \to \mathrm{Bild}\, T$ bijektiv, es gibt also einen stetigen bijektiven Operator $S : \mathrm{Bild}\, T \to (\ker T)^\perp$. Wir setzen S nach F fort, indem wir die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{Bild}\, T$ vorschalten. Dann folgt

$$\begin{aligned} ST - 1 &= -\mathrm{Proj}(\ker T), \\ TS - 1 &= -\mathrm{Proj}(\ker T^*) \end{aligned}$$

und diese sind von endlichem Rang.

(c)⇒(a): Der Raum $\ker T$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Eig}(ST - 1, -1)$ und dieser ist endlich-dimensional. Sei $V = \mathrm{Bild}(TS - 1)$, dann gilt $F = V + \mathrm{Bild}\, T$. □

Lemma 6.4. *Ein stetiger Operator $T : E \to F$ ist genau dann Fredholm, wenn es stetige Operatoren $S_1, S_2 : F \to E$ gibt so dass*

$$TS_1 - 1 \quad \textit{und} \quad S_2 T - 1$$

kompakt sind.

Beweis. "⇒" folgt aus dem letzten Lemma.

"⇐" Wir zeigen, dass $\ker T$ und $\ker T^*$ endlich-dimensional sind und dass T

abgeschlossenes Bild hat. Zunaechst ist $\ker T \subset \operatorname{Eig}(S_2 T - 1, -1$ und damit ist $\ker T$ endlich-dimensional. Da auch $(TS_1 - 1)^* = S_1^* T^* - 1$ kompakt ist, ist auch $\ker T^*$ endlich-dimensional. Es bleibt zu zeigen, dass das Bild abgeschlossen ist. Sei hierzu $Ty_n = x_n \to x$ konvergent. Wir koennen $y_n \in (\ker T)^\perp$ annehmen.

1. Fall: Es gibt ein $C > 0$ so dass $\|y_n\| \le C$ fuer jedes n. Dann hat $(S_2 T - 1)y_n = S_2 x_n - y_n$ eine konvergente Teilfolge, also hat (y_n) eine konvergente Teilfolge. Wir ersetzen y_n durch diese und nehmen $y_n \to y$ als konvergent an. Dann folgt $Ty = x$, also ist das Bild abgeschlossen.

2. Fall: Es gibt kein solches C. Dann koennen wir $0 \neq \|y_n\| \nearrow \infty$ annehmen. Sei dann $y_n' = \frac{1}{\|y_n\|} y_n$. Dann geht $x_n' = Ty_n'$ gegen Null. Wie oben folgt, dass y_n' eine konvergente Teilfolge hat, wir ersetzen wieder so dass $y_n' \to y'$. Es folgt

$$\|y'\| = 1, \quad y' \in (\ker T)^\perp, \quad Ty' = 0,$$

Widerspruch! □

Lemma 6.5. (a) *T Fredholm $\Rightarrow$ T^* Fredholm.*

(b) *T_1, T_2 Fredholm $\Rightarrow$ $T_1 T_2$ Fredholm.*

Beweis. (a) folgt aus der Tatsache dass mit $ST - 1$ und $TS - 1$ auch $T^* S^* - 1$ und $T^* S^* - 1$ von endlichem Rang sind.

(b) Seien $T_1 S_1 - 1$ und $T_2 S_2 - 1$ von endlichem Rang, dann ist auch

$$T_1 T_2 S_2 S_1 - 1 = T_1 (T_2 S_2 - 1) S_1 + T_1 S_1 - 1$$

von endlichem Rang, die andere Seite geht ebenso. □

Definition 6.6. Sei T ein Fredholm-Operator. Definiere den **Index** von T als

$$\begin{aligned} \operatorname{Ind}(T) &= \dim \ker T - \dim \operatorname{coker} T \\ &= \dim \ker T - \dim \ker T^*. \end{aligned}$$

Satz 6.7. (a) $\operatorname{Ind}(T^*) = -\operatorname{Ind}(T)$,

(b) $\operatorname{Ind}(ST) = \operatorname{Ind}(S) + \operatorname{Ind}(T)$,

(c) *die Menge* $\operatorname{Fred}(E, F)$ *der Fredholm-Operatoren ist offen in* $\mathcal{B}(E, F)$,

(d) $\mathrm{Ind} : \mathrm{Fred}(E, F) \to \mathbb{Z}$ *ist stetig und daher lokalkonstant und liefert eine Bijektion*

$$\pi_0(\mathrm{Fred}(E, F)) = \mathbb{Z},$$

falls E und F unendlich-dimensional.

Beweis. (a) ist klar.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\ker(ST) &= T^{-1}(\mathrm{Bild}\, T \cap \ker S) \\
\ker(T^* S^*) &= (S^*)^{-1}(\mathrm{Bild}\, S^* \cap \ker T^*) \\
&= (S^*)^{-1}\left((\ker S)^\perp \cap (\mathrm{Bild}\, T)^\perp\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}(ST) &= \dim(\mathrm{Bild}\, T \cap \ker S) + \dim\ker T \\
&\quad - \dim\left((\mathrm{Bild}\, T)^\perp \cap (\ker S)^\perp\right) - \dim\ker S^* \\
&= \dim(\mathrm{Bild}\, T \cap \ker S) + \dim\left((\mathrm{Bild}\, T)^\perp \cap \ker S\right) \\
&\quad - \dim\left((\mathrm{Bild}\, T)^\perp \cap \ker S\right) - \dim\left((\mathrm{Bild}\, T)^\perp \cap (\ker S)^\perp\right) \\
&\quad + \dim\ker T - \dim\ker S^* \\
&= \dim\ker S - \dim\ker T^* + \dim\ker T - \dim\ker S^* \\
&= \mathrm{Ind}(S) + \mathrm{Ind}(T).
\end{aligned}$$

Fuer (c) und (d) sei $T \in \mathrm{Fred}(E, F)$ und schreibe

$$\begin{aligned}
E &= \ker T \oplus (\ker T)^\perp, \\
F &= \mathrm{Bild}\, T \oplus \ker T^*.
\end{aligned}$$

Sei $\pi_1 : E \to \ker T$ die Orthogonalprojektion. Seien

$$E_1 = \ker T^* \oplus E, \qquad F_1 = \ker T \oplus F.$$

Definiere $T_1 : E_1 \to F_1$ durch

$$T_1(f \oplus e) = \pi_1(e) \oplus (f + T(e)).$$

Sei $i_1 : E \to E_1$ die Inklusionsabbildung und $\pi_2 : F_1 \to F$ die Projektion. Dann folgt

$$T = \pi_2 T_1 i_1.$$

Ferner ist T_1 eine Isomorphismus, denn T ist sowohl injektiv als auch surjektiv. Ist $S \in \operatorname{Fred}(E, F)$ ein zweiter Operator, so gilt

$$\begin{aligned}
\|S - T\|_{\mathrm{Op}} &= \sup_{\|e\|=1} \|S(e) - T(e)\| \\
&= \sup_{\|e\|^2 + \|f\|^2 = 1} \left\| [\pi_1(e) \oplus (f + S(e))] - [\pi_1(e) \oplus (f + T(e))] \right\| \\
&= \|S_1 - T_1\|_{\mathrm{Op}} .
\end{aligned}$$

Ist also $\|S - T\|$ klein, dann ist S_1 ein Isomorphismus und daher ist $S = \pi_2 S_2 i_1$ ein Fredholm-Operator. Ferner ist

$$\operatorname{Ind}(S) = \operatorname{Ind}(\pi_2) + \underbrace{\operatorname{Ind}(S_1)}_{=0} + \operatorname{Ind}(i_1)$$

lokalkonstant.

Es bleibt zu zeigen, dass aus $\operatorname{Ind}(S) = \operatorname{Ind}(T)$ folgt, dass S und T in derselben Zusammenhangskomponente liegen. Es gilt

$$\begin{aligned}
E &= \ker T \oplus (\ker T)^{\perp}, \\
F &= \operatorname{Bild} T \oplus \ker T^{*}.
\end{aligned}$$

Da die Menge $\operatorname{Lin}^{\times}((\ker T)^{\perp}, \operatorname{Bild} T)$ der Isomorphismen eine Bahn unter der Gruppe $\operatorname{GL}(\operatorname{Bild} T)$ ist, also zusammenhaengend, reicht es zu zeigen, dass jedes $T \in \operatorname{Fred}(E, F)$ stetig in ein T mit $\ker T = 0$ oder $\ker T^* = 0$ deformiert werden kann. Sind beide $\neq 0$, so sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von $\ker T$ und $w \in \ker T^* \setminus \{0\}$. Setze

$$T_t(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + v) = T(v) + \alpha_1 t w.$$

Es folgt $\dim \ker T_1 < \dim \ker T$ und $\dim \ker T_1^* < \dim \ker T^*$. □

Satz 6.8. *Sei M eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit und $P \in \Psi^d(M)$ elliptisch fuer ein $d \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(a) *$P : H_s(M) \to H_{s-d}(M)$ ist ein Fredholm-Operator,*

(b) $\ker P \subset C^\infty(M)$, $\mathrm{Ind}(P) = \dim\ker P - \dim\ker P^*$, *wobei* P^* *der formal adjungierte zu* P *ist und die Kerne in* $C^\infty(M)$ *betrachtet werden,*

(c) $\mathrm{Ind}(P)$ *haengt nur von der Homotopieklasse des Hauptsymbols von* P *ab.*

Beweis. (a) folgt aus Lemma 3.1.

(b) die erste Aussage ist klar wegen Hypoellitizitaet (Lemma 3.2). Sei $P_s : H_s \to H_{s-d}$ und sei P_s^* sein adjungierter. Waehle eine glatte ONB, so kann man lokal in s alle Hilbertraeume H_s identifizieren und erhaelt eine stetige Familie P_s von Operatoren, also ist $\mathrm{Ind}(P)$ nicht von s abhaengig. Waehle $s = d$ und zeige $\ker P_d^* = \ker P^*$. Sei hierzu $g \in \ker P_d^*$, dann ist g glatt und fuer jedes $f \in H_d$ gilt

$$0 = \left\langle f, P_d^* g \right\rangle_d = \langle Pf, g\rangle_0 .$$

Dies gilt also insbesondere fuer jedes $f \in C^\infty(M)$. Nach Definition folgt hieraus $P^* g = 0$.

(c) Es bleibt zu zeigen, dass aus $\sigma_P^H = \sigma_Q^H$ folgt $\mathrm{Ind}(P) = \mathrm{Ind}(Q)$. Es gilt aber $\mathrm{Ind}(P) = \mathrm{Ind}(P_t)$ mit $P_t = (1-t)P + tQ$. □

7 Elliptische Komplexe

Wir betrachten ab jetzt Pseudodifferentialoperatoren auf Vektorbuendeln. Ein **Symbol** ist dann lokal gegeben als eine Abbildung

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Lin}(V, W)$$

mit endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraeumen V, W dergestalt dass

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta p \right\| \leq C_{\alpha,\beta} \left(1 + |\xi|\right)^d .$$

Ein Ψ**DO** ist dann lokal gegeben als eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} P : C_c^\infty(\mathbb{R}^n, V) &\to C^\infty(\mathbb{R}^n, W), \\ f(x) &\mapsto \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} p(x, \xi) \hat{f}(\xi) \, d\xi. \end{aligned}$$

Global ist fuer eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M und komplexe Vektorbuendel $E, F \to M$ ein **Symbol** $p \in S^d(M, E, F)$ eine Abbildung

$$p : T^*M \to \mathrm{Hom}(E, F) = E^* \otimes F$$

ein Buendelhomomorphismus mit der Eigenschaft

$$\left\| D_x^\alpha D_\xi^\beta p \right\| \leq C_{\alpha,\beta} \left(1 + |\xi|\right)^d .$$

Das **Hauptsymbol** ist das induzierte Element in $S^d(M, E, F)/S^{d-1}(M, E, F)$.

Definition 7.1. Ein Ψ**DO-Komplex** ist eine Familie von Vektorbuendeln $(F_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit Pseudodifferentialoperatoren $P_j \in \Psi^d(M, F_j, F_{j+1})$ so dass

$$P_{j+1} P_j = 0$$

fuer alle j gilt.

Ein Komplex heisst **elliptischer Komplex**, falls

$$\ker(\sigma^H_{P_j}(x, \xi)) = \mathrm{Bild}(\sigma^H_{P_{j-1}}(x, \xi))$$

im Falle $|\xi| >> 0$ gilt.

Definition 7.2. Sei ein elliptischer Komplex gegeben. Waehle dann Metriken auf allen

F_j und definiere den Raum $L^2(M, F_j)$ der L^2-Schnitte in F_j. Sei

$$\Delta_j = P_j^* P_j + P_{j-1} P_{j-1}^*$$

in $\Psi^{2d}(M, F_j)$ der zugehoerige **Laplace-Operator**.

Der Komplex $(F_j)_j$ heisst ein **beschraenkter Komplex**, falls F_j fuer fast alle j. In diesem Fall sei

$$F_{\text{ev}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} F_{2j}, \qquad F_{\text{odd}} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} F_{2j+1}.$$

Sei $D = P + P^* \in \Psi^d(F_{\text{ev}}, F_{\text{odd}})$.

Lemma 7.3. (a) *Sei (F_j, P_j) ein Komplex. Dieser ist genau dann elliptisch, wenn alle Δ_j elliptisch sind.*

(b) *Ist (F_j) ausserdem beschraenkt, so der Komplex genau dann elliptisch, wenn $D = P + P^*$ elliptisch ist.*

Beweis. (a) Ist $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ eine Familie von endlich-dimensionalen unitaeren Vektorraeumen, so ist der Komplex

$$\to V_j \xrightarrow{A_j} V_{j+1} \to$$

genau dann exakt, wenn fuer jedes j der Laplace

$$L_j = A_j^* A_j + A_{j-1} A_{j-1}^*$$

invertierbar ist: "$\Rightarrow$" Zeige: L_j injektiv: Sei $L_j v = 0$. Mit $D = A_j^* A_j$ und $E = A_{j-1} A_{j-1}^*$ gilt $DE = ED = 0$, also lassen sich D und E, die sebstadjungiert sind, simultan diagonalisieren und fuer jeden gemeinsamen Eigenvektor w gilt $Dw = 0$ oder $Ew = 0$. Schreibt man v als Summe von Eigenvektorn, sieht man daraus $Dv = Ev = 0$ und daher $A_j v = 0 = A_{j-1}^* v$. Da der Komplex exakt ist, gibt es ein u mit $A_{j-1} u = v$, also $0 = A_{j-1}^* v = A_{j-1}^* A_{j-1} u$, damit $0 = \left\langle A_{j-1}^* A_{j-1} u, u \right\rangle = \left\langle A_{j-1} u, A_{j-1} u \right\rangle$ also $v = A_{j-1} u = 0$ und damit ist L_j injektiv. Da die Dimensionen stimmen, ist L_j auch surjektiv.

"$\Leftarrow$": Aus der simultanen Diagonalisierbarkeit von D und E und der Invertierbarkeit von L_j erhaelt man die Summe

$$V_j = \operatorname{Bild} A_j^* + \operatorname{Bild} A_{j-1}.$$

Andererseits ist

$$V_j = \operatorname{Bild} A_j^* \oplus \ker A_j$$

und wegen $\ker A_j \supset \text{Bild} A_{j-1}$ folgt Gleichheit. Auf die Hauptsymbole angewendet liefert dies Teil (a).

(b) Fuer einen Operator D gilt

$$\begin{aligned} D \text{ elliptisch} &\Leftrightarrow D, D^* \text{ elliptisch} \\ &\Leftrightarrow DD^* + D^*D \text{ elliptisch.} \end{aligned}$$ □

Beispiel 7.4. Der de Rham Komplex: Sei V ein komplexer Vektorraum, sei

$$TV = \mathbb{C} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \dots$$

die tensorielle Algebra mit der durch $(v, w) \mapsto v \otimes w$ gegebenen Multiplikation. Sei I das zweiseitige Ideal, das von allen $v \otimes v$ mit $v \in V$ erzeugt wird. Dann ist

$$\bigwedge^* V = TV/I$$

die **aeussere Algebra**. Schreibe $v \wedge w$ fuer deren Multiplikation. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist

$$(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k})_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n}$$

eine Basis fur $\bigwedge^* V$. Es folgt $\dim(\bigwedge^* V) = 2^n$.

Ist nun M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $F_p = \bigwedge^p T^*M$, sowie $\Omega^p = \Gamma^\infty\left(\bigwedge^j T^*M\right)$ der Raum der p-Differentialformen und sei $d = d^p : \Omega^p \Longrightarrow \Omega^{p+1}$ das aeussere Differential, zur Erinnerung: fuer $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M)$ ist

$$df = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x + k} dx_k$$

fuer jedes lokale Koordinatensystem (x_k). Ist ferner $\omega = f dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, so ist

$$d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

Eine Rechnung in lokalen Koordinaten zeigt $d^{p+1}d^p = 0$, also ist (F_p, d^p) ein Komplex.

Lemma 7.5. *Der de Rham Komplex ist elliptisch.*

Beweis. Fuer einen gegeben Vektor $\xi \in V$ sei nun $\text{ext}(\xi) : \bigwedge^p V \to \bigwedge^{p+1} V$ gegeben durch

$$\text{ext}(\xi)(\omega) = \xi \wedge \omega.$$

Sei $\xi = \sum_j \xi_j dx_j$ ein Element von T^*M in lokalen Koordinaten geschrieben. Aus

$d(f dx_I) = df \wedge dx_I = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} f \wedge dx_I$ folgt

$$\sigma_d(x, \xi) = i \operatorname{ext}(\xi).$$

Sei $\xi \in T_x^* M$ und $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von $T_x^* M$ mit $e_1 = \xi$. Fuer $I = (i_1, \dots, i_p)$ gilt

$$\operatorname{ext}(\xi) e_I = \begin{cases} 0 & i_1 = 1, \\ e_J & J = 1, i_1, \dots, i_p). \end{cases}$$

Damit ist

$$\ker \operatorname{ext}(\xi) = \operatorname{Bild} \operatorname{ext}(\xi),$$

also ist d elliptisch. □

8 Der Waermeleitungskern und der lokale Indexsatz

Lemma 8.1. *Sei $P \in \Psi^d(M)$ elliptisch, $d > 0$ mit positiv definitem Hauptsymbol $\sigma^H(\xi) > 0$ fuer $|\xi| >> 0$. Ferner sei P wesentlich selbstadjungiert. Dann existiert ein $C > 0$ so dass das Spektrum $\mathrm{Spec}(P)$ in dem Intervall $[-C, \infty)$ enthalten ist.*

Beweis. Sei Q_0 mit Hauptsymbol $\sqrt{\sigma_p^H(x,\xi)}$ fuer $|\xi| >> 0$ und sei $Q = Q_0^* Q_0$. Dann folgt $P - Q \in \Psi^{d-1}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle Pf, f\rangle &= \langle (P-Q)f, f\rangle + \langle Qf, f\rangle\,, \\ |\langle P-Q)f, f\rangle| &\le C|f|_{\frac{d}{2}}|(P-Q)f|_{-\frac{d}{2}} \\ &\le C|f|_{\frac{d}{2}}|f|_{\frac{d}{2}-1}, \\ \langle Qf, f\rangle &= \langle Q_0 f, Q_0 f\rangle\,, \\ |f|^2_{\frac{d}{2}} &< C|f|_0 + C|Q_0 f|_0^2. \end{aligned}$$

Fuer jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $C(\varepsilon) > 0$ so dass fuer jedes $f \in H_{\frac{d}{2}}$ gilt $|f|_{\frac{d}{2}-1} \le \varepsilon|f_{\frac{d}{2}}| + C(\varepsilon)|f|_0$ (Uebungsaufgabe!) Daher folgt

$$\begin{aligned} |\langle (P-Q)f, f\rangle| \le C|f_{\frac{d}{2}}|f|_{\frac{d}{2}-1} &\le C\varepsilon|f|^2_{\frac{d}{2}} + CC(\varepsilon)|f|_{\frac{d}{2}}|f|_0 \\ &\le C\varepsilon|Q_0 f|_0^2 + C\varepsilon|f|_0^2 + CC(\varepsilon)|f|_{\frac{d}{2}}|f|_0. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \langle Pf, f\rangle &\ge |Q_0 f|_0^2 - |\langle (P-Q)f, f\rangle| \\ &\ge |Q_0 f|_0^2 - \varepsilon C|Q_0 f|_0^2 - \varepsilon C|f|_0^2 - CC(\varepsilon)|f|_{\frac{d}{2}}|f|_0 \end{aligned}$$

Wir koennen ε so waehlen, dass $\varepsilon C < \frac{1}{2}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \langle Pf, f\rangle &\ge \frac{1}{2}|Q_0 f|_0^2 - \frac{1}{2}|f|_0^2 - C(\varepsilon)|f|_{\frac{d}{2}}|f|_0 \\ &\ge \frac{1}{2}|Q_0 f|_0^2 - \frac{1}{2}|f|_0^2 - C(\varepsilon)\sqrt{C}\sqrt{|f|_0^2 + |Q_0 f|_0^2}|f|_0 \end{aligned}$$

Beachtet man, dass die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - a\sqrt{b + x^2}$ ihr Minimum in $x = \sqrt{a^2 - b}$ hat, so erhaelt man

$$\begin{aligned} &\ge \frac{1}{2}(C(\varepsilon)^2 C - 1)|f|_0^2 - \frac{1}{2}|f|_0^2 - C(\varepsilon)\sqrt{C}\sqrt{|f|_0^2 C(\varepsilon)^2 C}|f|_0 \\ &= -\frac{1}{2}\left(C(\varepsilon^2 C + 1\right)|f|_0^2 \end{aligned}$$

□

Lemma 8.2. *Sei $P \in \Psi^d(M)$ $d > 0$ elliptisch mit positiv definitem Hauptsymbol und wesentlich selbstadjungiert. Dann ist fuer jedes $t > 0$ der Operator e^{-tP} glaettend.*

Beweis. Da die Funktion $\lambda^k e^{-t\lambda}$ beschraenkt ist fuer jedes $k \geq 0$, ist

$$P^k e^{-tP} = \int_{\operatorname{Spec} P} \lambda^k e^{-t\lambda}\, d\mu_P(\lambda)$$

stetig fuer jedes $k \geq 0$. Fuer gegebenes $g \in H_0$ ist dann $P^k(e^{-tP}g)$ wieder in H_0. Da $d > 0$ und P elliptisch, folgt $e^{-tP}g \in H_\infty(M) = C^\infty(M)$. □

Lemma 8.3. *Sei $P : \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(F)$ elliptisch in $\psi^d(E, F)$ fuer ein $d > 0$. Die Operatoren PP^* und P^*P seien wesentlich selbstadjungiert. Dann gilt fuer jedes $t > 0$, dass*

$$\operatorname{Ind}(P) = \operatorname{tr} e^{-tP^*P} - \operatorname{tr} e^{-tPP^*}.$$

Beweis. Der Operator PP^* habe Eigenwerte Null und $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. Der Operator P^*P habe Eigenwerte Null und $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$. Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_j von PP^*, dann folgt $P^*v \neq 0$ und

$$P^*P(P^*v) = P^*(PP^*v) = \lambda_j P^*v.$$

Ebenso gilt: Ist $w \in \operatorname{Eig}(P^*P, \mu_j)$, dann ist $Pw \in \operatorname{Eig}(PP^*, \mu_j)$, so dass schliesslich folgt $\lambda_j = \mu_j$ fuer jedes j. Damit folgt

$$\operatorname{tr} e^{-tP^*P} - \operatorname{tr} e^{PP^*} = \dim\ker(P^*P) - \dim\ker(PP^*) + \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{e^{t\mu_j} - e^{t\lambda_j}}_{=0} = \operatorname{Ind}(P)$$

□

Ebenso gilt fuer einen endlichen elliptischen Komplex (F_j, P_j), dass

$$\operatorname{Ind}(P) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr} e^{-t\Delta_i}.$$

Klassische ΨDO

Definition 8.4. Ein Operator $P \in \Psi^d(M)$ heisst **klassischer Pseudodifferentialoperator**, falls sein Symbol p die asymptotische Entwicklung

$$p(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x, \xi)$$

fuer $\xi \to \infty$ hat, wobei die p_j homogen sind, in dem Sinne, dass

$$p_j(x, t\xi) = t^{d-j} p_j(x, \xi)$$

fuer $t > 0$ und $\xi \neq 0$ gilt. Man beachte, dass die p_j nur in gegebenen lokalen Koordinaten wohldefiniert sind, dass aber die Tatsache, dass eine solche Entwicklung existiert, kartenunabhaengig ist. Ferner ist p_0 das Hauptsymbol und damit kartenunabhaengig.

Beispiel 8.5. Differentialoperatoren sind klassische ΨDO. Wir werden im Folgenden zeigen, dass fuer einen klassischen Operator P und $\lambda \notin \operatorname{Spec}(P)$ der Operator $(P-\lambda)^{-1}$ klassisch ist.

Lemma 8.6. *Sei $P \in \Psi^d(M)$ elliptisch klassisch und sei $\lambda \notin \operatorname{Spec}(P)$. Dann ist $(P-\lambda)^{-1}$ klassisch.*

Beweis. Sei $P \in \Psi^d(M)$ mit $d > 0$ elliptisch klassisch. Schreibe also

$$\sigma_P \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$$

mit $p_j \in S^{d-j}(M)$ homogen. Fuer $\lambda \in \mathbb{C}$ sei

$$p_j^\lambda = \begin{cases} p_0 - \lambda & j = 0, \\ p_j & j \geq 1. \end{cases}$$

Dann ist $R(\lambda) = (P-\lambda)^{-1}$ in $\Psi^{-d}(M)$ falls $\lambda \notin \operatorname{Spec}(P)$. Um zu zeigen, dass $R(\lambda)$ klassisch ist, setzen wir an

$$r(x, \xi, \lambda) \sim \sum_{j=0}^{\infty} r_j(x, \xi, \lambda).$$

Gesetzt, dies ist der Fall, dann fuehrt die Gleichung $R(\lambda)(P-\lambda) = \mathrm{Id}$ zu der Asymptotik

$$\sum_{\alpha, j, k} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha r_j \, D_x^\alpha p_k^\lambda \ \sim \ 1.$$

Dies fuehrt zu einer rekursiven Gleichung fuer die r_j, die wir jetzt zur Definition machen: Wir definieren

$$r_0(x, \xi, \lambda) = (p_0(x, \xi) - \lambda)^{-1}.$$

Es gilt dann fuer $|\xi| >> 0$

$$\begin{aligned} r_0(x,\xi,\lambda) &= \frac{1}{p_0(x,\xi)-\lambda} \\ &= \frac{1}{p_0(x,\xi)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{p_0(x,\xi)^n} \end{aligned}$$

und diese Entwicklung zeigt, dass r_0 klassisch ist. Definiere dann induktiv

$$r_m = -r_0 \sum_{\substack{|\alpha|+j+k=m \\ j<m}} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha r_j D_x^\alpha p_k^\lambda.$$

Dann ist jedes r_m klassisch (Induktion) und es folgt

$$r_m(x,t\xi,t^d\lambda) = t^{-m-d} r_m(x,\xi,\lambda),$$

sowie

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta D_\lambda^\gamma r_j| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma} \left(1+|\xi|+|\lambda|^{\frac{1}{d}}\right)^{-d-j-|\beta|-d|\gamma|}.$$

Sei

$$r_{(N)} = \sum_{j=0}^{N} r_j$$

und sei $R_{(N)}$ der zugehoerige Operator, sowie r das Symbol von $R(\lambda)$. Man zeigt durch eine Induktion, dass

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta D_\lambda^\gamma (r-r_{(N)})| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma,N} \left(1+|\xi|+|\lambda|^{\frac{1}{d}}\right)^{-d-N-|\beta|-d|\gamma|}.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

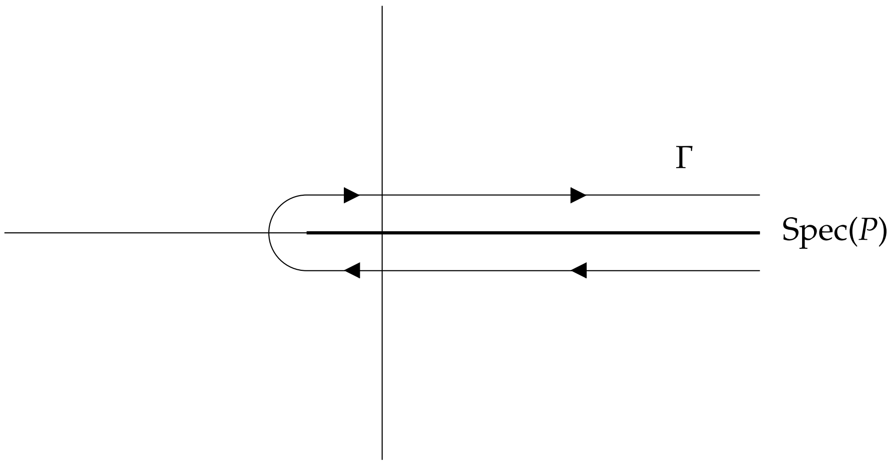
Beachte, dass insbesondere fuer $|\lambda| \geq \varepsilon$ gilt:

$$\begin{aligned} |r(x,\xi,\lambda/t) - r_{(N)}(x,\xi,\lambda/t)| &\leq C\left(1+|\xi|+|\lambda/t|^{1/d}\right)^{-d-N} \\ &= Ct^{1+\frac{N}{D}}\left(t^{1/d}+|\xi|t^{1/d}+|\lambda|^{1/d}\right)^{-d-N} \\ &\leq C_\varepsilon t^{1+\frac{N}{d}} \end{aligned}$$

fuer $0 < t < 1$.

Sei nun $P \in \Psi^d(M)$ mit $d > 0$ elliptisch klassisch mit $\sigma_P^H(\xi) > 0$ fuer $\xi >> 0$. Nimm ferner an, dass P wesentlich selbstadjungiert ist. Dann ist das Spektrum nach unten beschraenkt und der Waermeleitungsoperator e^{-tP} glaettend.

Sei Γ ein Weg, der wie im Bild das Spektrum von P negativ orientiert umrundet:



Wir definieren r_j wie im Beweis des Lemmas und setzen

$$\begin{aligned} e_j(t,x,\xi) &= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda} r_j(x,\xi,\lambda)\,d\lambda, \\ &= t^{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda}\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^k r_j(x,\xi,\lambda)\,d\lambda \end{aligned}$$

wobei wir partiell integriert haben. Mit der obigen Abschaetzung ergibt sich, dass e_j ein Symbol in $S^{-\infty}$ definiert. Beachte: Ist $d \in 2\mathbb{N}$, so gilt

$$e_j(t,x,-\xi) = (-1)^j e_j(t,x,\xi),$$

denn r_j hat im Fall $d \in 2\mathbb{N}$ dieselbe Homogenitaet. Setze

$$K_j(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i\langle x-y,\xi\rangle} e_j(t,x,\xi)\,d\xi$$

und $K_{(N)} = \sum_{j\le N} K_j$. Sei $K(t,x,y)$ der Kern von e^{-tP}. Es gilt

$$e^{-tP} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda}(P-\lambda)^{-1}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-t\lambda} R(\lambda)\,d\lambda.$$

Lemma 8.7. *Fuer* $0 < t < 1$ *gilt*

$$|K(t,x,y) - K_{(N)}(t,x,y)| \le C t^{\frac{N}{d}}.$$

Beweis. Es gilt

$$
\begin{aligned}
|K(t,x,y) - K_{(N)}(t,x,y)| &\le \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{-t\lambda} \left| R(\lambda) - R_{(N)}(\lambda) \right| d\lambda \\
&= \frac{1}{t} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{-\lambda} \left| R(\lambda/t) - R_{(N)}(\lambda/t) \right| d\lambda \\
&\le C_\Gamma t^{\frac{N}{d}}.
\end{aligned}
$$

□

Satz 8.8. *Sei $P \in \Psi^d(E)$ elliptisch klassisch fuer ein Vektorbuendel E ueber M. Ferner sei $\sigma_P^H(\xi) > 0$ fuer $|\xi| >> 0$ und P sei wesentlich selbstadjungiert. Dann gibt es glatte Schnitte e_j von $\mathrm{End}(E)$, die jeweils nur von endlich vielen Jets von $\sigma(P)$ abhaengen, so dass*

$$
K(t,x,x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} t^{\frac{j-n}{d}} e_j(x)
$$

fuer $t \to 0$ gilt. Ist $d \in 2\mathbb{N}$, dann ist $e_j(x) = 0$ falls j ungerade.

Beweis. Setze $e_j(x) = K_j(1,x,x)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
K_j(t,x,x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Gamma e^{-t\lambda} r_j(x,\xi,\lambda)\, d\lambda\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Gamma e^{-t\lambda} t^{\frac{j}{d}+1} r_j(x, t^{\frac{1}{d}}\xi, t\lambda)\, d\lambda\, d\xi \\
&= t^{\frac{j-n}{d}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}^n} \int_\Gamma e^{-\lambda} r_j(x,\xi,\lambda)\, d\lambda\, d\xi \\
&= t^{\frac{j-n}{d}} e_j(x).
\end{aligned}
$$

Mit dem letzten Lemma folgt die Behauptung. Die Zusatzaussage folgt aus $r_j(t,x,-\xi) = (-1)^j r_j(t,x,\xi)$ im Falle $d \in 2\mathbb{N}$. □

Folgende Eigenschaften der Schnitte e_j sind leicht einzusehen:

- $e_j(x, P_1 \oplus P_2) = e_j(x,P_1) \oplus e_j(x,P_2)$,
- $e_j(x, P_1 \otimes 1 + 1 \otimes P_2) = \sum_{p+q=j} e_p(x,P_1) \otimes e_q(x,P_2)$.

Fuer einen endlichen ellitpischen Komplex $F = (F_j, P_j)$ setzen wir

$$a_j(x,F) = \sum_i (-1)^i \operatorname{tr} e_j(x, \Delta_i).$$

Satz 8.9 (Lokaler Indexsatz). *Es gilt*

$$\int_M a_j(x,F)\,dx = \begin{cases} \operatorname{Ind}(F) & j = n, \\ 0 & \textit{sonst}. \end{cases}$$

Insbesondere gilt: Ist $d \in 2\mathbb{N}$, so ist

$$\operatorname{Ind}(F) = 0, \qquad \textit{falls } n = \dim M \textit{ ungerade.}$$

Korollar 8.10. *Die Euler-Charakteristik einer Mannigfaltigkeit ungerader Dimension verschwindet.*

Beweis des Satzes. Der Satz folgt sofort aus der Asymptotik

$$\sum_i (-1)^i \operatorname{tr} e^{-t\Delta_i} \sim \sum_j t^{\frac{j-n}{d}} \int_M a_j(x,F)\,dx. \qquad \square$$

9 Determinanten

Sei wieder $P \in \Psi^d(E)$ mit $d > 0$ elliptisch klassisch $\sigma_P^H > 0$ und P wesentlich selbstadjugiert. Sei $e_j(x)$ wie vor definiert und setze

$$\hat{e}_j = \int_M e_j(x)\,dx.$$

Seien $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_r$ die Eigenwerte von P, die < 0 sind und $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots$ die Eigenwerte > 0. Sei

$$\zeta_P(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-s}$$

die **Zeta-Funktion** von P.

Beispiel 9.1. Sei $P = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ auf $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dann ist

$$\zeta_P(s) = 2(4\pi^2)^{-s}\zeta(2s),$$

wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion bezeichnet.

Satz 9.2. *Die Reihe $\zeta_P(s)$ konvergiert absolut fuer $\mathrm{Re}(s) >> 0$ und setzt zu einer meromorphen Funktion auf $\mathbb{C}$ fort. Sie ist holomorph bis auf hoechstens einfache Pole an den Stellen $\frac{n-j}{d}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ fuer die gilt $\frac{n-j}{d} \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Das Residuum an der Stelle $\frac{n-j}{d}$ ist*

$$\frac{\hat{e}_j}{\Gamma\left(\frac{n-j}{d}\right)}.$$

Insbesondere ist sie holomorph an der Stelle $s = 0$.

Beweis. Sei $\lambda \notin \mathrm{Spec}(P)$, dann ist $(P - \lambda)^{-k}$ nach Lemma 4.5 fuer $k >> 0$ von Spurklasse. Hieraus folgt die Konvergenz der Reihe. Sei $N = \dim\ker P$. Es folgt

$$\Theta_P(t) := \left(\operatorname{tr} e^{-tP} - N\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} t^{\frac{j-n}{d}} e'_j,$$

wobei $e'_j = \hat{e}_j$ falls $j \neq n$ und $e'_n = \hat{e}_n - N$. Fuer $\mathrm{Re}(s) >> 0$ gilt

$$\zeta_P(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1}\Theta_P(t)\,dt.$$

Wir zerlegen das Integral in $\int_0^1 + \int_1^\infty$. Da $\Theta(t)$ schnell fallend fuer $t \to \infty$, konvergiert das zweite Integra fuer alle Werte von s, definiert also eine ganze Funktion in s.

Fuer $0 < t < 1$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\Theta_P(t) - \sum_{j=0}^{k} t^{\frac{j-n}{d}} e'_j\right| \leq C_k t^{\frac{k+1-n}{d}}.$$

Wir schreiben also

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1}\Theta_P(t)\, dt &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{j=0}^{k} \frac{e'_j}{s + \frac{j-n}{d}} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 t^{s-1} \left(\Theta_P(t) - \sum_{j=0}^{k} e'_j t^{\frac{j-n}{d}}\right) dt.\end{aligned}$$

Der zweite Summand ist holomorph in $\mathrm{Re}(s) > \frac{k_1-n}{d}$. □

Motivation: Sei $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ ein Tupel von Zahlen > 0. Dann ist

$$\zeta_\lambda(s) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j^{-s}$$

ganz in s und es gilt

$$\zeta'_\lambda(s) = -\sum_{j=1}^{N} (\log \lambda_j)\lambda_j^{-s},$$

also folgt

$$\exp\left(-\zeta'_\lambda(s)\Big|_{s=0}\right) = \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_N.$$

Seien nun $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die positiven Eigenwerte von P. Wir definieren das **regularisierte Produkt** der λ_j als

$$\widehat{\prod}_j \lambda_j := \exp\left(-\zeta'_p(0)\right)$$

und sei

$$\det{}'_{\mathrm{reg}}(P) := \mu_1 \cdots \mu_r \widehat{\prod}_j \lambda_j$$

die **regularisierte Determinante** von P.

Beispiel 9.3. Es gilt

$$\widehat{\prod}_{n\geq 1} n = \sqrt{2\pi}.$$

Satz 9.4. *Die Funktion* $\lambda \mapsto \det_{\mathrm{reg}}(P+\lambda)$, *definiert fuer* $\lambda >> 0$ *laesst sich zu einer ganzen Funktion fortsetzen mit Nullstellen in den negativen der Eigenwerte von* P, *wobei die Ordnung einer Nullstelle mit der Vielfachheit des Eigenwertes uebereinstimmt:*

$$\mathrm{ord}(\lambda) = \dim \mathrm{Eig}(-\lambda).$$

Beweis. Die Reihe $\zeta_{P+\lambda}(s) = \sum_j (\lambda_j + \lambda)^{-s}$ konvergiert fuer $\mathrm{Re}(s) >> 0$. Dort gilt dann

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \zeta_{P+\lambda}(s) = -\zeta_{P+\lambda}(s+1).$$

Durch analytische Fortsetzung gilt diese Gleichung fuer alle $s \in \mathbb{C}$ als Gleichheit meromorpher Funktionen. Fuer $m \in \mathbb{N}$ folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^{m+1} \zeta_{P+\lambda}(s) = (-1)^{m+1}(s+m)(s+m-1)\cdots s\zeta_{P+\lambda}(s+m+1).$$

Fuer $m >> 0$ folgt

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^{m+1} \zeta_{P+\lambda}(0) = 0.$$

Sei $M(s,\lambda) = \Gamma(s)\zeta_{P+\lambda}(s)$. Es gilt dann

$$\log \det_{\mathrm{reg}}(P+\lambda) = -\zeta'_{P+\lambda}(0) = -\lim_{s\to 0}\left(M(s,\lambda) - \frac{\zeta_{P+\lambda}(0)}{s}\right).$$

Der Limes vertauscht mit der λ-Ableitung, so dass fuer $m >> 0$ gilt

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^{m+1} \log \det_{\mathrm{reg}}(P+\lambda) &= (-1)^{m+1} M(m+1,\lambda)\\ &= (-1)^{m+1}\Gamma(m+1)\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda+\lambda_j)^{m+1}},\end{aligned}$$

wobei hier die Folge (λ_j) die folge aller Eigenwerte von P ist. □

Analytische Torsion. Sei nun M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und $\tilde{M}$ ihre uniberselle Ueberlagerung, sowie $\Gamma = \pi_1(M)$ ihre Fundamentalgruppe. Es gibt eine Aequivalenz von Kategorien

$$\left\{\Gamma\text{-Moduln}\right\} \quad \leftrightarrow \quad \left\{\text{lokalkonstante Garben ueber } M\right\},$$

die einem Γ-Modul V die Garbe

$$\left(\tilde{M} \times V\right)/\Gamma \to \tilde{M}/\Gamma = M$$

zuordnet. Hierbei operiert Γ auf $\tilde{M} \times V$ durch $\gamma(m, v_= \gamma m, \gamma v)$. Die Umkehrung ordnet einer lokalkonstanten Garbe $\mathcal{F}$ ihre Faser $\mathcal{F}_{x_0}$ ueber einem festen Basispunkt x_0 zu, auf dieser Faser operiert $\Gamma = \pi_1(M, x_0)$ durch Liftung von Wegen.

Sei nun M Riemannsch und (ω, V_ω) eine endlich-dimensionale unitaere Darstellung von Γ. Sei $\mathcal{F}$ die zugehoerige Garbe. Waehle eine orientierte Triangulierung von M, so wird M ein CW-Komplex, bei dem jede Zelle eine Orientierung traegt, die irgendwie gewaehlt ist. Die Garbe $\mathcal{F}$ wird beschrieben durch

- $\mathcal{F}(C)$=Halm ueber einem beliebig aber fest gewaehlten Punkt $x_C \in C$ fuer jede Zelle C, dies ist ein endlich-dimensionaler unitaerer Raum,
- $\phi_C^D : \mathcal{F}(C) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(D)$ ein Isomorphismus falls $C \subset \overline{D}$ mit den Eigenschaften

$$\Phi_C^C = \mathrm{Id}, \quad \phi_D^E \phi_C^D = \phi_C^E.$$

Sei

$$C^q(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\dim C = q} \mathcal{F}(C)$$

und sei $d_{\mathrm{comb}} : C^q \to C^{q+1}$ definiert durch

$$d_{\mathrm{comb}}(v_C) = \sum_{\substack{D : C \subset \overline{D} \\ \dim D = q+1}} [D : C] \phi_C^D(v),$$

wobei $[D : C]$ gleich 1 ist, falls die Orientierung auf C die ist, die von der auf D induziert wird, -1 andernfalls. Hierbei steht "comb" fuer "kombinatorisch", was daran erinnern soll, dass es sich um einen Komplex endlich-dimensionaler Vektorraeume handelt. Man rechnet nach, dass $d_{\mathrm{comb}}^2 = 0$ gilt, also wird $(C^q, d_{\mathrm{comb}})_q$ ein Komplex, dieser berechnet die Kohomologie $H^q(\mathcal{F})$. Ist $\tilde{M}$ zusammenziehbar, so gilt

$$H^q(\mathcal{F}) = H^q(\Gamma, V_\omega).$$

Da $\mathcal{F}(C)$ unitaer ist fuer jede Zelle C, ist C^q unitaer, wir koennen also den adjungierten $d_{\mathrm{comb}}^* : C^{q+1} \to C^q$ bilden, sowie den Laplace-Operator:

$$\Delta_{\mathrm{comb},q} = d_{\mathrm{comb}} d_{\mathrm{comb}}^* + d_{\mathrm{comb}}^* d_{\mathrm{comb}} : C^q \to C^q.$$

Es gilt dann $\Delta_{\mathrm{comb},q} \geq 0$ und

$$\dim H^q(\mathcal{F}) = \dim\ker \Delta_q.$$

Da die Kohomologie eine Invariante der Garbe ist, bleibt diese Zahl, die q-te **Betti-Zahl**, bei Verfeinerung der Triangulierung erhalten.

Man definiert die **Torsion** des Komplexes:

$$\begin{aligned}\tau &= \prod_{j=0}^{\dim M} \det{}'(\Delta_{\mathrm{comb},j})^{j(-1)^{j+1}}\\ &= \prod_{j=0}^{\dim M} \det{}'((d^*_{\mathrm{comb}} d_{\mathrm{comb}})_j)^{(-1)^j}.\end{aligned}$$

Die Gleichheit zwischen erster und zweiter Zeile kommt daher, dass jeder Eigenvektor zu einem Eigenwert $\neq 0$ von Δ wegen $(dd^*)(d^*d) = 0 = (d^*d)(dd^*)$ Eigenvektor von genau einem der beiden dd^* oder d^*d ist und ist v Eugenvektor von dd^*, dann ist d^*v Eigenvektor von d^*d sowie umgekehrt.

Da das mit den Betti-Zahlen so ist, liegt es nahe, zu vermuten, dass auch die Torsionszahl ein analytisches Pendant hat. Ein WEchsel der Topologie macht aus $(\tilde{M} \times V)/\Gamma = \tilde{M} \times_\Gamma V$ ein glattes unitaeres Vektorbuendel ueber M, das einen flachen Zusammenhang ∇ traegt. Man definiert dann den entsprechenden de Rham Komplex:

$$\Omega^p(V) = \Gamma^\infty(\tilde{M} \times_\Gamma V), \qquad d : \Omega^p \to \Omega^{p+1}.$$

Dann ist

$$H^p(\Omega^\bullet) = H^p(\mathcal{F})$$

und es gilt (Ray-Singer Vermutung, bewiesen von Cheeger und Mueller):

$$\tau(\mathcal{F}) = \prod_{q=0}^{\dim M} \det{}'_{\mathrm{reg}}(\Delta_q)^{q(-1)^{q+1}},$$

wobei hier die regularisierte Determinante des de Rham Laplace gemeint ist.

10 Der Satz von Atiyah-Bott-Patodi

Sei $f : M \to M$ eine Selbstabbildung der Mannigfaltigkeit M und sei $\pi : E \to M$ ein Vektorbuendel. Dann erhaelt man ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & M, \end{array}$$

wobei

$$f^*E = \Big\{(m, e) \in M \times E : f(m) = \pi(e)\Big\}.$$

Sei $f^* : \Gamma(E) \to \Gamma(f^*E)$ gegeben durch

$$f^*s(m) = (m, s(m)).$$

Gegeben sei ein Buendelhomomorphismus $\eta : f^*E \to E$. Das Paar (f, η) heisst **geometrischer Endomorphismus** von E. Man erhaelt eine Abbildung

$$\eta \circ f^* : \Gamma(E) \to \Gamma(E).$$

Beispiel 10.1. Sei $\tilde{f}$ ein Lift von f nach E, also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

kommutiere und $\tilde{f}$ sei faserweise linear. Wegen der universellen Eigenschaft von f^*E faktorisiert $\tilde{f}$ ueber einen eindeutig bestimmten Buendelhomomorphismus $\tilde{\eta} : E \to f^*E$. Dualisieren liefert $\eta : f^*E^* \to E^*$, also einen geometrischen Endomorphismus auf E^*.

Speziell im Fall $E = \bigwedge^k TM$ hat man durch das Differential Df einen natuerlichen Lift von f und daher auf $\bigwedge^k T^*M$ einen natuerlichen geometrischen Endomorphismus indiziert durch f.

Sei $\Gamma^\infty(E_0) \xrightarrow{P_0} \Gamma^\infty(E_1) \to \dots \xrightarrow{P_{N-1}} \Gamma^\infty(E_N)$ ein elliptischer Komplex. Fuer jedes j sei ein geometrischer Endomorphismus (f, η_j) von E_j gegeben. Ist fuer jedes j das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma^\infty(E_j) \arrow[r, "P_j"] \arrow[d, "f^*"'] & \Gamma^\infty(E_{j+1}) \arrow[d, "f^*"] \\ \Gamma^\infty(E_j) \arrow[r, "P_j"] & \Gamma^\infty(E_{j+1}) \end{tikzcd}$$

kommutativ, so heisst $(f, \eta_j)_j$ ein **geometrischer Endomorphismus** des Komplexes (E_j). Sei dann

$$L(f) = L(f, \eta) = \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}\left(f^* \mid H^j(E, P)\right)$$

die **Lefschetz-Zahl** von (f, η). Wir werden η als durch f gegeben betrachten und in der Notation nicht mehr weiter erwaehnen.

Sei nun der Komplex mit hermiteschen Metriken versehen und Δ_j der j-te Laplace-Operator. Fuer $\lambda \in \mathbb{C}$ sei $E_j(\lambda)$ der λ-Eigenraum von Δ_j und sei $\pi_j(\lambda)$ die Orthogonalprojection auf $E_j(\lambda)$. Dann gilt

$$\operatorname{tr}\left(f^* e^{-t\Delta_j}\right) = \sum_\lambda e^{-t\lambda} \operatorname{tr}\left(f^* \pi_j(\lambda)\right) = \sum_\lambda e^{-t\lambda} \operatorname{tr}\left(\pi_j(\lambda) f^*\right).$$

Sei nun $\lambda \neq 0$ und $v \in \Gamma(E_j)$ ein Eigenvektor zu λ mit $P^*Pv = \lambda v$ und $\|v\| = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle f^* v, v\rangle &= \frac{1}{\lambda} \langle f^* v, P^*Pv\rangle \\ &= \frac{1}{\lambda} \langle f^* Pv, Pv\rangle \\ &= \left\langle f^* \frac{Pv}{\sqrt{\lambda}}, \frac{Pv}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle. \end{aligned}$$

Ebenso im Fall $PP^*v = \lambda v$,

$$\langle f^* v, v\rangle = \left\langle f^* \frac{P^*v}{\sqrt{\lambda}}, \frac{P^*v}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle.$$

Hieraus folgt

$$\sum_j (-1)^j \operatorname{tr}\left(\pi_j(\lambda) f^*\right) = 0$$

fuer $\lambda \neq 0$.

Lemma 10.2. *Fuer die Lefschetz-Zahl gilt*

$$L(f) = \sum_j (-1)^j \operatorname{tr}\left(f^* e^{-t\Delta_j}\right).$$

Sei $x \in M$ ein Fixpunkt von f, also $f(x) = x$. Dann operiert das Differential Df auf dem Tangentialraum T_xM. Der Punkt x heisst **regulaerer Fixpunkt**, falls

$$\det(Df(x) - 1) \neq 0.$$

Lemma 10.3. *Regulaere Fixpunkte sind isolierte Fixpunkte.*

Beweis. Sei $\mathrm{Fix}(f)$ die Menge aller Fixpunkte von f. Sei x ein regulaerer Fixpunkt. Dann ist zu zeigen, dass es eine offene Umgebung U von x gibt mit $U \cap \mathrm{Fix}(f) = \{x\}$. **Angenommen** nicht, dann existiert eine Folge x_j von Fixpunkten mit $x_j \to x$ und $x_j \neq x$ fuer jedes j. Nach Koordinatenwahl koennen wir $x = 0 \in \mathbb{R}^n$ annehmen. Nach Uebergang zu einer Teilfolge koennen wir annehmen, dass $z_j = \frac{x_j}{\|x_j\|}$ gegen ein $z \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Da f dfferenzierbar in Null:

$$f(y) = Df(0)y + \phi(y)\left\|y\right\|,$$

wobei ϕ stetig in $y = 0$ mit $\phi(0) = 0$. Aus $f(x_j) = x_j$ folgt nach Division durch $\left\|x_j\right\|$:

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{x_j}{\left\|x_j\right\|} & = Df(0) & \dfrac{x_j}{\left\|x_j\right\|} & + & \phi(x_j) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ z & = Df(0) & z & + & 0 \end{array}$$

und damit hat $Df(0)$ der Eigenwert 1, **Widerspruch!** □

Lemma 10.4. *Sei $P \in \Psi^d(E)$ wesentlich selbstadjungiert mit positivem Hauptsymbol. Die glatte Abbildung $f : M \to M$ habe nur regulaere Fixpunkte. Dann gibt es glatte Funktionen a_j auf M, so dass gilt*

$$\mathrm{tr}\left((\eta f^*)e^{-tP}\right) \sim \sum_{x\in\mathrm{Fix}(f)} \sum_{j=0}^{\infty} t^{\frac{j}{d}} a_j(x)$$

fuer $t \searrow 0$.

Beweis. Der Beweis ist eine Neuauflage der Asymptotik des Waermeleitungskerns mit dem Zusatzfaktor ηf^*. □

Proposition 10.5. *Sei D ein verallgemeinerter Laplace-Operator und $f : M \to M$ mit regulaeren Fixpunkten. Dann gilt*

$$\lim_{t\to 0} \mathrm{tr}\left(f^* e^{-tD}\right) = \sum_{x\in\mathrm{Fix}(f)} \frac{\mathrm{tr}\,(f_x^*)}{|\det(1 - Df(x)|}.$$

Beweis. Seien r_j und e_j wie im Beweis der Asymptotik des Waermeleitungskerns. In einem Fixpunkt x gilt

$$\begin{aligned} r_0(x,\xi,\lambda) &= (|\xi|^2-\lambda)^{-1}, \\ e_0(x,\xi,t) &= e^{-t|\xi|^2}. \end{aligned}$$

Wir rechnen lokal mit $f(0)=0$ als einzigem Fixpunkt. Betrachte f_x^* als matrixwertige Funktion. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{tr} f^* K_0(t,x,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{tr}(f_x^*) e^{2\pi i\langle f(x)-x,\xi\rangle} e^{-t|\xi|^2}\,d\xi\,dx.$$

Substituiere $y=f(x)-x$ und $\xi \rightsquigarrow \xi/\sqrt{t}$, dann $y \rightsquigarrow y\sqrt{t}$ und erhalte

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{tr}\left(f^*_{y\sqrt{t}}\right) e^{2\pi i\langle y,\xi\rangle} |\det(1-Df(y\sqrt{t}))|^{-1} e^{-|\xi|^2}\,d\xi\,dy.$$

Das ζ-Integral ergibt $\sqrt{\pi}^n e^{-\pi^2|y|^2}$, so dass wir

$$\sqrt{\pi}^n \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{tr}\left(f^*_{y\sqrt{t}}\right) |\det(1-Df(y\sqrt{t}))|^{-1} e^{-\pi^2|y|^2}\,dy$$

erhalten. Fuer $t\to 0$ geht dies gegen

$$\sqrt{\pi}^n \operatorname{tr}(f_0^*)|\det(1-D(0)|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2|y|^2}\,dy = \operatorname{tr}(f_0^*)|\det(1-D(0))|^{-1}. \qquad \square$$

Satz 10.6 (Atiyah-Bott-Patodi)**.** *Sei (E_j,P_j) ein elliptischer Komplex, wobei P_j jeweils ein Differentialoperator der Ordnung 1 ist. Sei $(f,\eta_j)_j$ ein geometrischer Endomorphismus des elliptischen (E_j), wobei f nur regulaere Fixpunkte hat. Dann gilt*

$$\sum_j (-1)^j \operatorname{tr}\left(f^* \mid H^j(E,P)\right) = \sum_{x\in\operatorname{Fix}(f)} \frac{\operatorname{tr}(f_x^*)}{|\det(1-Df(x)|}.$$

Beweis. Jedes $P_jP_j^*+P_j^*P_j$ hat ein positiv definites Hauptsymbol, ist daher ein verallgemeinerter Laplace zu einer Metrik. Daher folgt die Aussage durch Vergleich von Proposition 10.5 mit Lemma 10.2. $\square$

Satz 10.7 (Lefschetz-Formel). *Die glatte Abbildung $f : M \to M$ habe nur regulaere Fixpunkte. Dann gilt*

$$\sum_{q\geq 0}(-1)^q \, \operatorname{tr}(f^*|H^q(M)) = \sum_{x\in \operatorname{Fix}(f)} \operatorname{sign}(\det(1 - Df(x))),$$

wobei $\operatorname{sign}(x)$ *das Vorzeichen der reellen Zahl* $x \neq 0$ *ist.*

Beweis. Wir wenden den Satz auf den natuerlichen geometrischen Endomorphismus auf $\bigwedge^k T^*M$ an. Dann ist

$$\operatorname{tr} f_x^* = \operatorname{tr}\left((Df)^* \;\middle|\; \bigwedge^k T_x^*M\right).$$

Die alternierende Summe ueber k ist

$$\sum_{k=0}^{\dim M}(-1)^k \operatorname{tr}\left(Df(x)^* \;\middle|\; \bigwedge^k T_x^*M\right) = \det(1 - Df(x)).$$

Damit folgt die Behauptung aus dem Satz. □

11 Von Neumann Algebren

Sei H ein Hilbert-Raum. Fuer eine Teilmenge M des Raums $\mathcal{B}(H)$ der beschraenkten Operatoren auf H sei der **Kommutant** definiert als

$$M^\circ = \{T \in \mathcal{B}(H) : Tm = mT \ \forall_{m \in M}\}.$$

Das heisst, der Kommutant ist der Zentralisator von M in $\mathcal{B}(H)$. Ist $M \subset N \subset \mathcal{B}(H)$, dann folgt $N^\circ \subset M^\circ$. Wir schreiben $M^{\circ\circ}$ fuer den **Bikommutanten**, also den Kommutanten von M°.

Die Algebra $\mathcal{B}(H)$ traegt die natuerliche Involution $*$ gegeben durch

$$\langle T^* v, w\rangle = \langle v, Tw\rangle .$$

Eine **von-Neumann-Algebra** ist eine *-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(H)$ mit der Eigenschaft $\mathcal{A}^{\circ\circ} = \mathcal{A}$.

Fuer eine Teilmenge $M \subset \mathcal{B}(H)$ gilt $M \subset M^{\circ\circ}$ und daher $M^{\circ\circ\circ} \subset M^\circ$. Da andererseits auch $M^\circ \subset (M^\circ)^{\circ\circ} = M^{\circ\circ\circ}$, folgt $M^\circ = M^{\circ\circ\circ}$, also ist M° eine von-Neumann-Algebra, falls M eine *-abgeschlossene Teilmenge ist.

Ist insbesondere M eine selbstadjungierte Menge, dann ist $M^{\circ\circ}$ die kleinste von-Neumann-Algebra, die M enthaelt und man nennt diese die von M **erzeugte von-Neuman-Algebra**.

Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ eine von-Neumann-Algebra. Dann ist $Z(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}^\circ$ das **Zentrum** von $\mathcal{A}$, also die Menge aller $a \in \mathcal{A}$, die mit allen anderen Elementen von $\mathcal{A}$ kommutieren. Eine von-Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ heisst ein **Faktor**, falls das Zentrum trivial, also gleich $\mathbb{C}\mathrm{Id}$ ist.

Beispiele 11.1.

- $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ ist ein Faktor, man nennt eine Algebra isomorph zu dieser einen **Typ-I Faktor**.
- $\mathcal{A} = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}$ ist ein Faktor.
- Die Algebra der Diagonalmatrizen in $\mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ ist eine von-Neumann-Algebra, die kein Faktor ist.
- Seien V, W zwei Hilbert-Raeume. Die Algebra $\mathcal{B}(V) \otimes \mathcal{B}(W)$ operiert auf dem Hilbert-Tensorprodukt $V \hat{\otimes} W$ durch $A \otimes B(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w)$. Die von-Neumann-Algebra, die vom Bild von $\mathcal{B}(V) \otimes \mathcal{B}(W)$ erzeugt wird, ist die gesamte $\mathcal{B}(V \hat{\otimes} W)$.

Beweis. Sei B das Bild, es reicht zu zeigen, dass $B^\circ = \mathbb{C}$ ist. Sei dazu $T \in B^\circ$ und sei $w_0 \in W$, dann liegt der Operator $S : v \otimes w \mapsto \langle w, w_0 \rangle\, v \otimes w_0$ in B, kommutiert also T mit S, was impliziert $T(v \otimes w_0) = \tilde{T}(v) \otimes w_0$ fuer einen beschraenkten Operator $\tilde{T}$ auf V. Dieser kommutiert wiederum mit allen $S' \in \mathcal{B}(V)$, so dass $\tilde{T} = \lambda \mathrm{Id}$ ist fuer ein $\lambda = \lambda(v_0) \in \mathbb{C}$, also ist $T(v \otimes w_0) = \lambda(w_0) v \otimes w_0$. Dies gilt fuer jedes w_0, also haben wir $T(v \otimes w) = \lambda(w) v \otimes w$. Wir koennen denselben Schluss auch mit vertauschten Rollen von v und w machen und erhalten ebenso $T(v \otimes w) = \mu(v) v \otimes w$ fuer ein $\mu(v) \in \mathbb{C}$. Dann folgt $\lambda(w) = \mu(v)$ fuer alle v, w, also sind $\lambda = \mu$ beide konstant, also $T = \lambda \mathrm{Id}$ wie verlangt. □

12 Schwache und starke Topologien

Sei H ein Hilbert-Raum. Auf $\mathcal{B}(H)$ gibt es die Topologie der Operatornorm, genannt die **Normtopologie**. Es gibt noch weitere. Jedes $v \in H$ induziert eine Halbnorm auf $\mathcal{B}(H)$ durch $T \mapsto \|Tv\|$. Die Topologie gegeben durch diese Familie vin Halbnormen heisst die **starke Topologie** auf $\mathcal{B}(H)$.

Je zwei $v, w \in H$ induzieren eine Halbnorm durch $T \mapsto |\langle Tv, w \rangle|$. Die Topologie, die hierdurch unduziert wird, heisst **schwache Topologie**. Normkonvergenz impliziert starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz, so dass man fuer eine Teilmenge $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ erhaelt

$$\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}^n \subset \overline{\mathcal{A}}^s \subset \overline{\mathcal{A}}^w,$$

wobei $\overline{\mathcal{A}}^n$ der Normabschluss von $\mathcal{A}$ ist, $\overline{\mathcal{A}}^s$ der starke Abschluss und $\overline{\mathcal{A}}^w$ der schwache Abschluss. Im allgemeinen stimmen diese Abschluesse nicht ueberein.

Es gilt $\overline{\mathcal{A}}^s, \overline{\mathcal{A}}^w \subset \mathcal{A}^{\circ\circ}$.

Satz 12.1 (von Neumanns Bikommutantensatz)**.** *Sei H ein Hilbert-Raum und sei $\mathcal{A}$ eine *-Unteralgebra mit Eins von $\mathcal{B}(H)$. Dann gilt*

$$\overline{\mathcal{A}}^s = \overline{\mathcal{A}}^w = \mathcal{A}^{\circ\circ}.$$

Beweis. Wir zeigen zunaechst $\overline{\mathcal{A}}^w \subset \mathcal{A}^{\circ\circ}$. Sei dazu $T \in \overline{\mathcal{A}}^w$, dann existiert eine Folge

$T_n \in \mathcal{A}$, die schwach gegen T konvergiert. Sei $S \in \mathcal{A}^\circ$, so folgt fuer $v, w \in H$,

$$\begin{aligned}\langle STv, w\rangle &= \lim_n \langle ST_n v, w\rangle \\ &= \lim_n \langle T_n S v, w\rangle \\ &= \langle TSv, w\rangle .\end{aligned}$$

Da dies fuer alle v, w gilt, folgt $ST = TS$, also $T \in \mathcal{A}^{\circ\circ}$.

Damit reicht zu zeigen, dass $\mathcal{A}^{\circ\circ} \subset \overline{\mathcal{A}}^s$. Sei $T \in \mathcal{A}^{\circ\circ}$. Wir wollen zeigen, dass T im starken Abschluss von $\mathcal{A}$ liegt. Eine Nullumgebungsbasis der starken Topologie ist gegeben durch das System aller Mengen der Form $\{S \in \mathcal{B}(H) : \left\|Sv_j\right\| < \varepsilon,\ j = 1, \dots, n\}$, wobei $v_1, \dots, v_n$ beliebige Vektoren in H sind und $\varepsilon > 0$. Es reicht also zu zeigen, dass fuer gegebene $v_1, \dots, v_n \in H$ und $\varepsilon > 0$ es ein $a \in \mathcal{A}$ gibt mit $\left\|Tv_j - av_j\right\| < \varepsilon$ fuer $j = 1, \dots n$. Hierfuer betrachte die Diagonaloperation von $\mathcal{B}(H)$ auf H^n. Der Kommutant von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(H^n)$ ist die Algebra aller $n \times n$ Matrizen mit Eintraegen in $\mathcal{A}^\circ$ und der Bikommutant von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(H^n)$ ist die Algebra $\mathcal{A}^{\circ\circ} I$, wobei $I = I_n$ die $n \times n$ Einheitsmatrix ist. Betrachte den Vektor $v = (v_1, \dots, v_n)^t$ in H^n. Der Abschluss von $\mathcal{A}v$ in H^n ist eine abgeschlossener, $\mathcal{A}$-stabiler Unterraum von H^n. Da $\mathcal{A}$ eine *-Algebra ist, ist das orthogonale Komplement $(\mathcal{A}v)^\perp$ ebenfalls $\mathcal{A}$-stabil. Daher ist die Orthogonalprojektion P auf den Abschluss von $\mathcal{A}v$ auch im Kommutant von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}(H^n)$. Daher kommutiert $T \in \mathcal{A}^{\circ\circ} I$ mit P und laesst $\overline{\mathcal{A}v}$ stabil. Es folgt $Tv \in \overline{\mathcal{A}v}$ und daher gibt es zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein Element a von $\mathcal{A}$ so dass $\|Tv - av\| < \varepsilon$ und daher $\left\|Tv_j - av_j\right\| < \varepsilon$ fuer $j = 1, \dots, n$. □

Der Bikommutantensatz sagt, dass fuer eine unitale *-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(H)$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte von Neumann-Algebra gleich dem starken oder schwachen Abschluss von A ist.

Lemma 12.2. *Eine von Neumann Algebra $\mathcal{A}$ wird von ihren unitaeren Elementen erzeugt.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine von Neumann Algebra in $\mathcal{B}(H)$. Sei $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ der reelle Vektorraum der selbstadjungierten Elemente. Dann ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$. Sei $T \in \mathcal{A}_\mathbb{R}$ und sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ so dass $f(x) = x$ fuer jedes x im Spektrum von T. Dann gilt

$$T = f(T) = \int_\mathbb{R} \hat{f}(y) e^{2\pi i y T}\, dy.$$

Die unitaren Elemente $e^{2\pi i y T} \in \mathcal{B}(H)$ sind Potenzreihen in T, jeder Operator, der mit T vertauscht, wird also mit allen $e^{2\pi i T}$ vertauschen und umgekehrt wird jeder Operator, der mit allen $e^{2\pi i y T}$ kommutiert, auch mit T kommutieren, also gehoert T zu der von den unitaeren $e^{2\pi i y T}$ erzeugten von Neumann Algebra. □

Sei B_1 der Einheitsball in $\mathcal{B}(H)$, also die Menge aller $T \in \mathcal{B}(H)$ mit $\|T\|_{\mathrm{Op}} \leq 1$.

Lemma 12.3. *B_1 ist schwach kompakt.*

Beweis. Funktionalanalysis. □

13 Darstellungen

Eine unitaere Darstellung (π, V_π) einer lokalkompakten Gruppe G heisst **Faktor-Darstellung**, falls die von Neumann Algebra $\mathrm{VN}(\pi)$, die von $\pi(G) \subset \mathcal{B}(V_\pi)$ erzeugt wird, ein Faktor ist. Also ist π genau dann eine Faktordarstellung, wenn $\pi(G)^\circ \cap \pi(G)^{\circ\circ} = \mathbb{C}\,\mathrm{Id}$.

Lemma 13.1. *Jede irreduzible Darstellung ist eine Faktordarstellung.*

Beweis. Sei π irreduzibel. Das Lemma von Schur besagt $\pi(G)^\circ = \mathbb{C}\mathrm{Id}$, also folgt $\pi(G)^{\circ\circ} = \mathcal{B}(V_\pi)$. □

Definition. Zei unitaere Darstellungen π_1, π_2 von G heissen **quasi-aequivalent**, falls es einen in der starken Topologie stetigen unitalen *-Algebren-Isomorphismus

$$\phi : \mathrm{VN}(\pi_1) \to \mathrm{VN}(\pi_2)$$

gibt, der $\phi(\pi_1(x)) = \pi_2(x)$ fuer jedes $x \in G$ erfuellt.

Beispiel 13.2. Eine gegebene unitaere Darstellung π ist quasi-aequivalent zur direkten Summe $\pi \oplus \pi$.

Lemma 13.3. *Zwei irreduzible unitaere Darstellungen einer lokalkompakten Gruppe sind genau dann quasi-aequivalent, wenn sie unitaer aequivalent sind.*

Beweis. Seien die unitaeren Darstellungen (π, V_π) und (η, V_η) unitaer equivalent, d.h., es gibt einen unitaeren Vertauschungs-Operator $T : V_\pi \to V_\eta$. Dann induziert T einen Isomorphismus $\mathrm{VN}(\pi) \to \mathrm{VN}(\eta)$ gegeben durch $S \mapsto TST^{-1}$. Damit sind π und η auch quasi-aequivalent.

Fuer die Umkehrung seien (π, V_π) und (η, V_η) zwei irreduzible unitaere Darstellungen von G und sei $\phi : \mathrm{VN}(\pi) \to \mathrm{VN}(\eta)$ ein *-Isomorphismus so dass $\phi(\pi(x)) = \eta(x)$ fuer alle $x \in G$. Fuer $u, v \in V_\pi$ sei $T_{u,v} : V_\pi \to V_\pi$ gegeben durch

$$T_{u,v}(x) := \langle x, u \rangle \, v.$$

Dann gilt $T_{u,v} T_{w,z} = \langle z, u \rangle \, T_{w,v}$ und $T_{u,v}^* = T_{v,u}$. Sei $(e_j)_{j \in I}$ eine ONB von V_π. Fuer jedes $j \in I$ ist die Abbildung $P_j = T_{e_j, e_j}$ die Orthogonalprojektion auf den eindimensionalen Raum $\mathbb{C} e_j$ und T_{e_j, e_k} ist eine Isometrie von $\mathbb{C} e_j$ nach $\mathbb{C} e_k$ und ist Null auf $\mathbb{C} e_i$ fuer $i \neq j$.

Die P_j sind paarweise orthogonale Projektionen und die Summe $\sum_j P_j$ konvergiert in der starken Topologie gegen die Identitaet. Dasselbe gilt fuer die Bilder $\phi(P_j)$. Sei $V_{\eta,j} = \phi(P_j) V_\eta$. Dann ist V_η die direkte orthogonale Summe der $V_{\eta,j}$. Wir behaupten, dass $\phi(T_{e_j,e_k})$ eine Isometrie von $V_{\eta,j}$ nach $V_{\eta,k}$ ist, sowie gleich Null auf $V_{\eta,i}$ fuer $i \neq j$. Hierfuer seien $x, y \in V_{\eta,j}$, dann ist

$$\begin{aligned} \left\langle \phi(T_{e_j,e_k}) x, \phi(T_{e_j,e_k}) y \right\rangle &= \left\langle \phi(T_{e_k,e_j} T_{e_j,e_k}) x, y \right\rangle \\ &= \left\langle \phi(T_{e_j,e_j}) x, y \right\rangle = \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Fixiere nun $j_0 \in I$ und waehle $f_{j_0} \in V_{\eta,j_0}$ von Norm 1. Fuer $j \neq j_0$ setze $f_j = \phi(T_{e_{j_0},e_j}) f_{j_0}$. Betrachte die Isometrie $S : V_\pi \to V_\eta$ gegeben durch $S(e_j) = f_j$. Es folgt, dass $S T_{e_j,e_k} = \phi(T_{e_j,e_k}) S$. Die von Neumann Algebra $\mathrm{VN}(\pi) = \mathcal{B}(V_\pi)$ ist erzeugt von den T_{e_j,e_k}, also ist S ein Vertauschungsoperator auf einen abgeschlossenen Unterraum von V_η. Da η irreduzibel ist, muss S surjektiv sein und damit unitaer. $\square$

Definition. Eine Faktordarstellung π heisst **Typ-I Darstellung**, falls π quasi-aequivalent zu einer Darstellung π_1 ist, deren von Neumann Algebra $\mathrm{VN}(\pi_1)$ ein Typ I Faktor ist. Anders gesagt ist π genau dann Typ I, wenn π quasi-aequivalent zu einer irreduziblen Darstellung ist.

Beispiel 13.4. Wir geben jetzt ein Beispiel einer Darstellung, die nicht Typ I ist. Sei $\Gamma \neq \{1\}$ eine Gruppe mit der Eigenschaft, dass jede Konjugationsklasse $[\gamma] \neq [1]$ unendlich viele Elemente hat. Ein Beispiel ist die freie Gruppe F_2 in zwei Erzeugern. Ein weiteres Beispiel ist die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\pm 1$.

Sei R die rechtsregulaere Darstellung von Γ auf dem Hilbert-Raum $H = \ell^2(\Gamma)$. Sei $\mathrm{VN}(R)$ die von Neumann Algebra erzeugt von $R(\Gamma) \subset \mathcal{B}(\ell^2(\Gamma))$.

Proposition 13.5. $\mathrm{VN}(R)$ *ist ein Faktor, der nicht von Typ I ist.*

Beweis. Wir zeigen, dass der Kommutant $\mathrm{VN}(R)^\circ$ gerade die von Neumann Algebra ist, die von der regulaeren Linksdarstellung L von Γ erzeugt wird. Hierfuer betrachte die natuerliche Orthonormalbasis $(\delta_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ definiert durch

$$\delta_\gamma(\tau) = \begin{cases} 1 & \gamma = \tau, \\ 0 & \gamma \neq \tau. \end{cases}$$

Es gilt $R_\gamma \delta_{\gamma_0} = \delta_{\gamma_0\gamma^{-1}}$ und $L_\gamma \delta_{\gamma_0} = \delta_{\gamma\gamma_0}$. Sei $T \in \mathrm{VN}(R)^\circ$, also $TR_\gamma = R_\gamma T$ fuer jedes $\gamma \in \Gamma$. Dann ist $T(\delta_1) = \sum_\gamma c_\gamma \delta_\gamma$ fuer bestimmte Koeffizienten $c_\gamma \in \mathbb{C}$, fuer die gilt $\sum_\gamma |c_\gamma|^2 < \infty$. Fuer ein beliebiges $\gamma_0 \in \Gamma$ erhaelt man

$$\begin{aligned} T(\delta_{\gamma_0}) &= T(R_{\gamma_0^{-1}}\delta_1) = R_{\gamma_0^{-1}} T(\delta_1) \\ &= R_{\gamma_0^{-1}} \sum_\gamma c_\gamma \delta_\gamma = \sum_\gamma c_\gamma \delta_{\gamma\gamma_0} \\ &= \sum_\gamma c_\gamma L_\gamma(\delta_{\gamma_0}), \end{aligned}$$

und das bedeutet $T = \sum_\gamma c_\gamma L_\gamma$, wobei die Summe in der starken Topologie konvergiert. Damit ist $T \in \mathrm{VN}(L)$. Da trivialerweise $\mathrm{VN}(L) \subset \mathrm{VN}(R)^\circ$, folgt also $\mathrm{VN}(R)^\circ = \mathrm{VN}(L)$. Also sind $\mathrm{VN}(L)$ und $\mathrm{VN}(R)$ jeweils der Kommutant des anderen. Insbesondere folgt, dass jedes Element von $\mathrm{VN}(L)$ als eine Summe der Form $\sum_\gamma c_\gamma L_\gamma$ geschrieben werden kann. Ebenso kann jedes Element von $\mathrm{VN}(R)$ als Summe der Form $\sum_\gamma d_\gamma R_\gamma$ geschrieben werden. Wir zeigen nun, dass $\mathrm{VN}(R)$ ein Faktor ist. Hierzu muessen wir zeigen, dass der Schnitt von $\mathrm{VN}(R)$ und $\mathrm{VN}(L)$ trivial ist. Sei also $T \in \mathrm{VN}(L) \cap \mathrm{VN}(R)$. Dann haben wir zwei Darstellungen

$$\sum_\gamma c_\gamma L_\gamma = T = \sum_\gamma d_\gamma R_\gamma.$$

Insbesondere ist $\sum_\gamma c_\gamma \delta_\gamma = T(\delta_1) = \sum_\gamma d_\gamma \delta_{\gamma^{-1}}$, so dass $d_\gamma = c_{\gamma^{-1}}$, also gilt fuer $\alpha \in \Gamma$ einerseits

$$T(\delta_\alpha) = \sum_\gamma c_\gamma L_\gamma \delta_\alpha = \sum_\gamma c_\gamma \delta_{\gamma\alpha} = \sum_\gamma c_{\gamma\alpha^{-1}} \delta_\gamma$$

und andererseits

$$T(\delta_\alpha) = \sum_\gamma c_\gamma R_{\gamma^{-1}} \delta_\alpha = \sum_\gamma c_\gamma \delta_{\alpha\gamma} = \sum_\gamma c_{\alpha^{-1}\gamma} \delta_\gamma.$$

Das bedeutet, dass die Funktion $\gamma \mapsto c_\gamma$ konstant ist auf Konjugationsklassen. Da die Summen konvergieren muessen, muss diese Funktion auf allen unendlichen Konjugationsklassen verschwinden. Da Γ ausser der triviallen Konjugationsklasse nur unendliche Klassen hat, folgt $c_\gamma = 0$ ausser fuer $\gamma = 1$, also $T \in \mathbb{C}\,\mathrm{Id}$.

Schlioesslich zeigen wir, dass $\mathrm{VN}(R)$ nicht von Typ I ist. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}\tau : \mathrm{VN}(R) &\to \mathbb{C},\\ T &\mapsto \langle T\delta_1, \delta_1\rangle .\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist stetig bezueglich der schwachen und starken Topologien. Wir zeigen $\tau(ST) = \tau(TS)$ fuer alle $S, T \in \mathrm{VN}(R)$. Wegen Stetigkeit reicht es, dies fuer $S = R_\gamma$ und $T = R_\rho$ mit $\gamma, \rho \in \Gamma$ zu zeigen. In dem Fall haben wir

$$\tau(ST) = \tau(R_\gamma R_\rho) = \tau(R_{\gamma\rho}) = \left\langle \delta_{\gamma\rho}, \delta_1 \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{if } \gamma\rho = 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

Die letzte Bedingung ist symmetrisch in γ und ρ, da in der Gruppe Γ gilt $\gamma\rho = 1 \Leftrightarrow \rho\gamma = 1$, also folgt aus der gleichen Rechnung, dass $\tau(ST) = \tau(TS)$ wie behauptet.

Wir zeigen, dass fuer jede selbstadjungierte Projektion $P \neq 0$ in $\mathrm{VN}(R)$ gilt

$$0 < \tau(P) \leq 1.$$

Fuer $T = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma R_\gamma \in \mathrm{VN}(R)$ gilt $\tau(T) = c_1$. Sei nun P eine selbstadjungierte Projektion, also $P^* = P = P^2$. Schreibe $P = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma R_\gamma$, dann gilt

$$\sum_\gamma c_\gamma R_\gamma = P = P^2 = \sum_\gamma \left(\sum_\delta c_\delta c_{\delta^{-1}\gamma} \right) R_\gamma.$$

Es gilt insbesondere $c_1 = \sum_\delta c_\delta c_{\delta^{-1}}$. Die Bedingung $P = P^* = \sum_\gamma \overline{c_{\gamma^{-1}}} R_\gamma$ liefert $c_{\gamma^{-1}} = \overline{c_\gamma}$ und daher $\sigma(P) = c_1 = \sum_\gamma |c_\gamma|^2$. Deshalb ist $c_1 > 0$ und $c_1 \geq c_1^2$, also $1 \geq c_1$.

Nimm nun an, es gibt einen *-Isomorphismus $\phi : \mathcal{B}(H) \to \mathrm{VN}(R)$ fuer einen Hilbert-Raum H. Da $\mathrm{VN}(R)$ unendlich-dimensional ist, ist auch H unendlich-dimensional. Sei $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine orthogonale Folge in H. Sei Q_j die Orthogonalprojektion mit Bild $\mathbb{C}e_j$ und sei $P_j = \phi(Q_j)$. Dann ist P_j eine selbstadjungierte Projektion. Ferner ist Q_j conjugiert zu Q_k in $\mathcal{B}(H)$, denn es gibt unitaere Operatoren, die e_j und e_k vertauschen. Dann sind P_j and P_k konjugiert in $\mathrm{VN}(R)$ und daher ist $\tau(P_j) = \tau(P_k)$ eine feste Zahl $c > 0$. Der Operator $Q_1 + \cdots + Q_n$ ist wieder eine selbstadjungierte Projektion, also gilt dasselbe fuer $P_1 + \cdots + P_n$. Es folgt

$$1 \geq \tau(P_1 + \cdots + P_n) = \tau(P_1) + \cdots + \tau(P_n) = nc,$$

Da dies fuer jedes n gilt, folgt $c = 0$, ein Widerspruch! Daher kann ϕ nicht existieren und VN(R) ist nicht von Typ I. □

14 L2-Spur

Definition 14.1. Sei $\mathcal{A}$ eine von Neumann Algebra und sei

$$\mathcal{A}^+ = \Big\{ \sum_{j=1}^n a_j^* a_j : a \in \mathcal{A} \Big\}.$$

Eine **Spur** oder **Spurabbildung** auf $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $\tau : \mathcal{A}^+ \to [0, \infty)$ mit

- $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$ fuer alle $x, y \in \mathcal{A}^+$ und
- $\tau(a^* a) = \tau(aa^*)$ fuer alle $a \in \mathcal{A}$.

Beispiele 14.2.

- Ist $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$, dann ist

$$\mathrm{tr}(T) = \sum_j \left\langle Te_j, e_j \right\rangle$$

fuer $T \in \mathcal{A}^+$ eine Spurabbildung.

- Ist Γ eine Gruppe und $\mathcal{A} = \mathrm{VN}(R)$, dann ist

$$\tau\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma R_\gamma \right) = c_1$$

eine Spur. Diese nimmt nur endliche Werte an, ist also eine **endliche Spur**. Auf $\mathcal{B}(H)$ existiert nur dann eine endliche Spur, wenn $\dim(H) < \infty$ ist.

- Sind τ_A und τ_B Spuren auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$, dann wird $\tau_A \otimes \tau_B$ eine Spur auf $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Diese ist definiert durch

$$\tau_A \otimes \tau_B(a^* a \otimes b^* b) = \tau_A(a^* a)\tau_B(b^* b).$$

Definition 14.3. Ist τ eine Spur auf einer von Neumann Algebra $\mathcal{A}$. Ein Element $a \in \mathcal{A}$ heisst von **τ-Spurklasse**, wenn $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j^* a_j$ geschrieben werden kann mit $\lambda_j \in \mathbb{C}$ und $\tau(a_j^* a_j) < \infty$. Ist die Spur endlich, so sind alle Elemente von Spurklasse. Die Spur τ laesst sich zu einer linearen Abbildung auf den Vektorraum $\mathcal{A}_\tau$ der τ-Spurklasse-Operatoren fortsetzen.

Sei nun M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit, Γ ihre Fundamentalgruppe und $\tilde{M}$ ihre universelle Ueberlagerung. Auf dem Hilbert-Raum $H = L^2(\tilde{M})$ operiert die

Gruppe Γ und wir betrachten die von Neumann Algebra

$$\mathcal{B}(H)^\Gamma$$

aller Operatoren T, die mit Γ vertauschen, also

$$\gamma T \gamma^{-1} = T$$

fuer jedes $\gamma \in \Gamma$ erfuellen. Fixiere einen **Fundamentalbereich** F von $\tilde{M}/\Gamma$, d.h., F ist eine offene Teilmenge von $\tilde{M}$ so dass der Rand ∂F eine Nullmenge ist und es ein Vertretersystem R von $\tilde{M}/\Gamma$ gibt so dass

$$F \subset R \subset \overline{F}.$$

Beispiele 14.4.

- Ist $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ der zweidimensionale Torus,dann ist $F = (0,1) \times (0,1)$ ein Fundamentalbereich.
- Fixiere $m_0 \in \tilde{M}$, dann ist

  $$F = \left\{ x \in \tilde{M} : d(x, m_0) < d(\gamma x, m_0) \, \forall_{1 \neq \gamma \in \Gamma} \right\}$$

  ein Fundamentalbereich.

Satz 14.5. *Die Auswahl des Fundamentalbereichs F induziert einen unitaeren Isomorphismus von Hilbert-Raeumen*

$$H = L^2(\tilde{M}) \cong \ell^2(\Gamma) \hat{\otimes} L^2(M).$$

Hierbei geht die Γ*-Operation links auf die Linkstranslation auf* $\ell^2(\Gamma)$ *ueber, so dass ein Isomorphismus von von Neumann Algebren*

$$\mathcal{B}(H)^\Gamma \cong \mathrm{VN}(R) \otimes \mathcal{B}(L^2(M))$$

induziert wird.

Beweis. Bis auf eine Nullmenge stimmt $\tilde{M}$ mit der disjunkten Vereinigung

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F$$

ueberein. Wir identifizieren $L^2(M)$ mit $L^2(F)$ und definieren die unitaere Abbildung

$$\begin{aligned} \ell^2(\Gamma)\hat{\otimes}L^2(F) &\xrightarrow{\cong} L^2(\tilde{M}) \\ (c_\gamma)\otimes f &\longmapsto \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma f(\gamma^{-1}x). \end{aligned}$$ □

Definition 14.6. Wir definieren eine Spur tr_Γ auf $\mathcal{B}(H)^\Gamma$ durch den Isomorphismus vom Satz und

$$\mathrm{tr}_\Gamma := \tau\otimes\mathrm{tr},$$

wobei τ die Spur auf $\mathrm{VN}(R)$ mit $\tau\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma R_\gamma\right) = c_1$ und tr die Spur auf $\mathcal{B}(L^2(M))$ ist.

Satz 14.7. *Ein Integraloperator $I_k \in \mathcal{B}(H)$ mit L^2-Kern $k \in L^2(\tilde{M}\times\tilde{M})$ ist genau dann Γ-invariant, wenn fast ueberall fuer jedes $\gamma\in\Gamma$ gilt*

$$k(\gamma x, \gamma y) = k(x, y).$$

Ist der Kern k zusaetzlich glatt und konvergiert die Summe $k_\Gamma(x,y) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(\gamma x, y)$ lokal-gleichmaessig mit allen Ableitungen, dann ist der Operator I_k von tr_Γ-Spurklasse und es gilt

$$\mathrm{tr}_\Gamma(I_k) = \int_F k(x,x)\,dx.$$

Beweis. Wir schreiben L_γ fuer die Γ-Operation auf $L^2(\tilde{M})$ und rechnen

$$\begin{aligned} L_{\gamma^{-1}} I_k L_\gamma(f)(x) &= I_k L_\gamma(f)(\gamma x) \\ &= \int_{\tilde{M}} k(\gamma x, y) L_\gamma f(y)\,dy \\ &= \int_{\tilde{M}} k(\gamma x, y) f(\gamma^{-1} y)\,dy \\ &= \int_{\tilde{M}} k(\gamma x, \gamma y) f(y)\,dy, \end{aligned}$$

da die Metrik und damit das Maß auf $\tilde{M}$ invariant unter Γ ist. Die Invarianz von I_k ist damit gleichbedeutend mit

$$\int_{\tilde{M}} k(\gamma x, \gamma y) f(y)\,dy = \int_{\tilde{M}} k(x,y) f(y)\,dy$$

fast ueberall in x fuer jedes $f \in L^2(\tilde{M})$ und alle $\gamma \in \Gamma$. Hieraus folgt die erste Aussage. Mithin folgt, dass das Integral aus der zweiten Aussage nicht von der Wahl des Fundamentalbereichs F abhaengt. Wir werden diesen also frei variieren.

Sei nun $(c_\gamma) \otimes f \in \ell^2(\Gamma) \otimes L^2(F)$. Wir wenden I_k an und erhalten

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} c_\gamma \int_F k(\gamma x, y) f(y)\, dy.$$

Hieraus folgt, dass $\operatorname{tr}_\Gamma(I_k)$ gleich der Spur des Operators

$$\begin{aligned} T_k : L^2(F) &\to L^2(F), \\ f &\mapsto \int_F k(x,y) f(y)\, dy \end{aligned}$$

ist.

Sei nun $\sum_{i=1}^N u_i = 1$ eine glatte Teilung der Eins auf $M = \Gamma \backslash \tilde{M}$. Diese Teilung der Eins kann so gewaehlt werden, dass es zu je zwei Indizes $1 \le i, j \le N$ einen Fundamentalbereich $F = F_{i,j}$ gibt so dass kein Randpunkt von F auf $\operatorname{supp} u_i \cup \operatorname{supp} u_j$ geworfen wird. Sei $\tilde{u}_i$ der Pullback von u_i nach $\tilde{M}$. Da die u_i eine Teilung der Eins sind, folgt

$$k(x,y) = \sum_{i,j} \underbrace{\tilde{u}_i(x) \tilde{u}_j(y) k(x,y)}_{=k_{i,j}(x,y)}.$$

Es reicht nun, die Behauptung fuer $k = k_{i,j}$ zu zeigen. Sei der Fundamentalbereich F entsprechend gewaehlt, also so, dass

$$k(x,y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \notin \partial F,\ y \notin \partial F.$$

Das bedeutet, dass $k|_{F \times F}$ einen Integraloperator T_k mit glattem Kern auf der kompakten Mannigfaltigkeit M induziert und die entsprechende Spur ist die Spur dieses Operators. Der Satz folgt damit aus dem folgenden Lemma.

Lemma 14.8. *Sei M eine glatte kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei $k \in C^\infty(M \times M)$. Dann ist der Operator*

$$T_k(f)(x) = \int_M k(x,y) f(y)\, dy$$

von Spurklasse auf dem Hilbert-Raum $L^2(M)$ und es gilt

$$\operatorname{tr}(T_k) = \int_M k(x,x)\, dx.$$

Beweis. Man waehlt lokale Karten mit Werten nicht in $\mathbb{R}^n$, sondern in $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Durch Anwendung einer Zerlegung der Eins reduziert sich das Problem dann auf den Fall $M = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. In diesem Fall hat man eine Fourier-Entwicklung

$$k(x,y) = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta}\, e^{2\pi i\langle x,\alpha\rangle} e^{-2\pi i\left\langle y,\beta\right\rangle}$$

mit schnell fallenden Koeffizienten $c_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}^n$. Sei $\Delta = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ der laplace-Operator, dann ist $T_{k,N} = (\Delta+1)^N T_k$ ein beschraenkter Operator fuer jedes $N \in \mathbb{N}$. Fuer grosse N ist $(\Delta+1)^{-N}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator, also ist $(\Delta+1)^{-2N}$ von Spurklasse, damit ist $T_k = (\Delta+1)^{-2N} T_{k,2N}$ das Produkt aus einem beschraenkten mit einem Spurklasse-Operator, also Spurklasse. Fuer einen Multiindex γ sei $e_\gamma(x) = e^{2\pi i\left\langle x,\gamma\right\rangle}$, dann ist

$$\begin{aligned}
T_k e_\gamma(x) &= \int_M k(x,y) e_\gamma(y)\,dy \\
&= \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} e_\alpha(x) \int_M \overline{e_\beta(y)} e_\gamma(y)\,dy \\
&= \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} e_\alpha(x) \left\langle e_\gamma, e_\beta \right\rangle = \sum_\alpha c_{\alpha,\gamma} e_\alpha(x)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} T_k &= \sum_\gamma \left\langle T_k e_\gamma, e_\gamma \right\rangle \\
&= \sum_{\alpha,\gamma} c_{\alpha,\gamma} \left\langle e_\alpha, e_\gamma \right\rangle = \sum_\alpha c_{\alpha,\alpha} \\
&= \sum_\alpha c_{\alpha,\alpha} \int_M e_\alpha(x) e_{-\alpha}(x)\,dx \\
&= \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} \int_M e_\alpha(x) e_{-\beta}(x)\,dx \\
&= \int_M k(x,x)\,dx.
\end{aligned}$$

Das Lemma und der Satz sind bewiesen. □

15 Der L2-Indexsatz

Sei $U \subset L^2(\tilde{M}) = H$ ein Γ-invarianter abgeschlossener Teilraum. Dann liegt die Orthogonalprojektion $P = P_U$ in $\mathcal{B}(H)^{\Gamma,+}$. Wir definieren die **$\Gamma$-$L^2$-Dimension** von U als

$$\dim_\Gamma(U) := \mathrm{tr}_\Gamma(P_U).$$

Diese kann $+\infty$ sein.

Satz 15.1. *Sei $(E_j, P_j)_{j=0}^N$ ein metrisierter elliptischer Komplex ueber M mit Differentialoperatoren der Ordnung 1 und sei Δ_j der entsprechende Laplace Operator. Sei $H^j = \ker(\Delta_j)$. Sei $\tilde{\Delta}_j$ der Lift nach $\tilde{M}$. Dann ist der Raum*

$$\tilde{H}_j = \ker(\tilde{\Delta}_j) \subset L^2(\tilde{M})^\Gamma$$

von endlicher Γ-Dimension und es gilt

$$\sum_{j=0}^N (-1)^j \dim H^j = \sum_{j=0}^N (-1)^j \dim_\Gamma(\tilde{H}_j).$$

Beweis. Der Operator $e^{-t\tilde{\Delta}_j}$ hat glatten Kern $\tilde{k}_j(t,x,y)$ und wie bei der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit stellt man fest, dass

$$\left\| \tilde{k}_j(t,x,y) \right\| \leq C_\varepsilon e^{-\tilde{d}(x,y)^2/t}$$

falls $d(x,y) > \varepsilon > 0$. Die Anzahl aller $\gamma \in \Gamma$ mit $d(F, \gamma F) \leq T$ laesst sich gegen $C\,\mathrm{vol}(B_T)$ abschaetzen fuer $T \to \infty$. Das Volumen eines Balls B_T waechst bei beschraenkter Kruemmung am schnellsten bei konstanter negativer Kruemmung, wo es durch Ce^{aT} abschaetzt wird. Zusammengenommen folgt hierraus, dass die Reihe

$$k_j(t,x,y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \tilde{k}_j(t, \gamma x, y)$$

lokal-gleichmaessig mit allen Ableitungen konvergiert. Damit ist dies der

Integralkern von $e^{-t\Delta_j}$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \dim H^j &= \sum_{j=0}^{N}(-1)^j \operatorname{tr} e^{-t\Delta_j} \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \operatorname{tr} e^{-t\Delta_j} \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \int_M \operatorname{tr} k_j(t,x,x)\,dx \\
&= \lim_{t\to 0}\sum_{j=0}^{N}(-1)^j \sum_{\gamma\in\Gamma}\int_M \operatorname{tr} \tilde{k}_j(t,\gamma x,x)\,dx \\
&= \sum_{j=0}^{N}(-1)^j \underbrace{\lim_{t\to 0}\int_F \operatorname{tr} \tilde{k}_j(t,x,x)\,dx}_{=\dim_\Gamma(\tilde{H}^j)} \\
&\quad + \sum_{j=0}^{N}(-1)^j \underbrace{\lim_{t\to 0}\sum_{\gamma\neq 1}\int_F \operatorname{tr} \tilde{k}_j(t,\gamma x,x)\,dx}_{=0}\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$