$SL_2(\mathbb{R})$

Anton Deitmar

Inhaltsverzeichnis

1 Präliminarien

1.1 Haar-Maße

Definition 1.1.1. Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G zusammen mit einer Topologie auf G, so dass die Abbildungen

$$\begin{aligned} G \times G &\to G, & G &\to G, \\ (x, y) &\mapsto xy, & x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

stetig sind. Eine **lokalkompakte Gruppe** ist eine topologische Gruppe G, die ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ist.

Beispiele 1.1.2.
- $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^\times, \times)$ sind lokalkompakte Gruppen. Die Stetigkeit von Addition und Multiplikation zeigt man in der Analysis.
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ sind mit der Topologie von $\mathbb{R}^{n^2}$ topologische Gruppen.

Definition 1.1.3. Ein **Radon-Maß** auf einem lokalkompakten Raum X ist ein Maß μ auf der Borel-σ-Algebra mit den folgenden Eigenschaften:

- lokal-endlich: für jedes $x \in X$ gibt es eine Umgebung U mit $\mu(U) < \infty$,
- regulär von außen: Für jedes messbare $A \subset X$ gilt

$$\mu(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ \text{offen}}} \mu(U),$$

- regulär von innen: Für jedes offene $U \subset X$ gilt

$$\mu(U) = \sup_{\substack{K \subset U \\ \text{kompakt}}} \mu(K).$$

Ist μ ein Radon-Maß, dann ist jedes $f \in C_c(X)$ integrierbar und die Abbildung

$$\mu \mapsto I_\mu$$

mit

$$I_\mu(f) = \int_X f \, d\mu$$

ist nach dem Satz von Riesz eine Bijektion

$$\left\{\text{Radon-Maße}\right\} \leftrightarrow \left\{\text{positive lineare Funktionale } I \text{ auf } C_c(X)\right\}.$$

Das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ ist ein Radon-Maß.

Definition 1.1.4. Ein Radon-Maß μ auf einer lokalkompakten Gruppe G heisst **linksinvariant**, falls

$$\mu(xA) = \mu(A)$$

für jedes $x \in G$ und jede messbare Menge $A \subset G$ gilt. Ein linksinvariantes Radon-Maß $\neq 0$ auf einer lokalkompakten Gruppe heißt auch **Haar-Maß**.

Satz 1.1.5. *Auf jeder lokalkompakten Gruppe gibt es ein Haar-Maß. Dieses ist eindeutig bestimmt bis auf Vielfache. Sind also μ und ν Haar-Maße auf G, so gibt es genau ein $c > 0$ mit $\mu = c\mu$.*

Wegen die Eindeutigkeit eines Haar-Maßes ist der Raum der integrierbaren Funktionen $L^1(G)$ eindeutig bestimmt. Die

Linksinvarianz eines Haar-Maßes bedeutet, dass

$$\int_G f(xy)\, d\mu(y) = \int_G f(y)\, d\mu(y)$$

für jedes $f \in L^1(G)$.

Definition 1.1.6. Ist μ ein Haar-Maß, dann ist für jedes $x \in G$ auch $\mu_x(A) = \mu(Ax)$ eines, so dass ein $\Delta(x) > 0$ existiert mit $\mu(Ax) = \Delta(x)\mu(A)$. Die Funktion

$$\Delta : G \to (0, \infty)$$

ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus, also

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y).$$

Eine lokalkompakte Gruppe G heisst **unimodular**, falls $\Delta \equiv 1$ ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes links-Haar-Maß auch rechtsinvariant ist.

Kompakte Gruppen und abelsche Gruppen sind unimodular.

Satz 1.1.7 (Quotienten-Integralformel)**.** *Sei G eine lokalkompakte Gruppe und sei H eine abgeschlossene Untergruppe. Es existiert genau dann ein G-invariantes Radon-Maß $\nu \neq 0$ auf dem Quotienten G/H, wenn die Modularfunktionen Δ_G und Δ_H auf H übereinstimmen. In diesem Fall ist das Maß ν eindeutig bestimmt bis auf skalare Vielfache. Zu gegebenen Haar-Maßen auf G und H existiert genau ein solches ν, so dass für jedes $f \in C_c(G)$ die* **Quotienten-Integralformel**

$$\int_G f(x)\, dx = \int_{G/H} \int_H f(xh)\, dh\, d\nu(x)$$

gilt. Das so gegebene Maß ν heißt das **Quotientenmaß**.

2 SL(2,R)

2.1 Die obere Halbebene

Die Gruppe $GL_2(\mathbb{C})$ operiert auf der Menge $\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ durch Matrixmultiplikation. Da dies eine Operation durch lineare Abbildungen ist, operiert die Gruppe auch auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, den wir als die Menge aller eindimensionalen Unterräume von $\mathbb{C}^2$ definieren, oder als

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \left(\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}\right)\Big/\mathbb{C}^\times.$$

Wir schreiben die Elemente von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in der Form $[z, w]$, wobei $(z, w) \in \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ und

$$[z, w] = [z', w'] \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{C}^\times : (z', w') = (\lambda z, \lambda w).$$

Für $w \neq 0$ gibt es genau einen Vertreter der Form $[z, 1]$ und die Abbildung $z \mapsto [z, 1]$ ist eine injektive Abbildung $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, so dass wir $\mathbb{C}$ als eine Teilmenge von $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ betrachten können. Das Komplement von $\mathbb{C}$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist ein einzelner Punkt $\infty = [1, 0]$, so dass $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ auch mit der Einpunktkompaktifizierung $\widehat{\mathbb{C}}$ von $\mathbb{C}$ identifiziert werden kann, also der **Riemannschen Zahlenkugel**

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Wir betrachten die Operation von $GL_2(\mathbb{C})$ gegeben durch $g.(z, w) = (z, w)g^t$. Mit $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ haben wir

$$g.[z, 1] = [az + b, cz + d] = \left[\frac{az + b}{cz + d}, 1\right],$$

falls $cz + d \neq 0$. Die rationale Funktion $\frac{az+b}{cz+d}$ hat genau einen Pol in der Menge $\widehat{\mathbb{C}}$, also definieren wir eine Operation der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ auf der Zahlenkugel durch

$$g.z = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } cz + d \neq 0, \\ \infty & \text{falls } cz + d = 0, \end{cases}$$

falls $z \in \mathbb{C}$. Beachte, dass $cz + d$ und $az + b$ nicht beide Null sein können. Schliesslich

$$g.\infty = \lim_{\mathrm{Im}(z)\to\infty} g.z = \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$ mit $\lambda \neq 0$ operiert trivial, also reicht es, die Operation auf der Untergruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) : \det(g) = 1\}$ zu betrachten.

Definition 2.1.1. Sei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

die **obere Halbebene** in $\mathbb{C}$.

Lemma 2.1.2. *Die Gruppe* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ *operiert transitiv auf der Riemannschen Zahlenkugel* $\widehat{\mathbb{C}}$. *Das Element* $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ *operiert trivial. Schränken wir die Operation auf die Untergruppe* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *ein, wird die Menge* $\widehat{\mathbb{C}}$ *in drei Orbiten zerlegt:* $\mathbb{H}$ *und* $-\mathbb{H}$ *und die Menge* $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Beweis. Für gegebenes $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = \begin{pmatrix} z & z-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\infty$, also ist die Operation transitiv. Insbesondere liegt $\widehat{\mathbb{R}}$ im G-Orbit des Punktes ∞.

Für $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ und $z \in \mathbb{C}$ rechnet man

$$\mathrm{Im}(g.z) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Dies bedeutet, dass die Gruppe G die drei genannten Mengen stabil lässt. Es ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{smallmatrix}\right).0 = x \in \mathbb{R}$ und $\left(\begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right).0 = \infty$, daher ist $\widehat{\mathbb{R}}$ ein G-Orbit. Wir zeigen, dass G auf $\mathbb{H}$ transitiv operiert. Für gegebenes $z = x + iy \in \mathbb{H}$ gilt

$$z = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \frac{x}{\sqrt{y}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{y}} \end{pmatrix} i. \qquad \square$$

Damit operiert die lokalkompakte Gruppe

$$G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) : ad - bc = 1 \right\}.$$

auf der oberen Halbebene durch **gebrochen lineare Transformationen**:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Man rechnet leicht nach, dass

$$\mathrm{Im}(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz + d|^2}.$$

Stabilisiert $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ den Punkt $i \in \mathbb{H}$, dann folgt $\frac{ai+b}{ci+d} = i$, oder $ai + b = -c + di$, so dass $a = d$ und $b = -c$. Der Stabilisator des Punktes $i \in \mathbb{H}$ ist also die **Rotationsgruppe**:

$$K = \mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R},\ a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

Da die Operation von G auf $\mathbb{H}$ transitiv ist, kann die obere Halbebene $\mathbb{H}$ mit dem Quotienten G/K identifiziert werden.

Satz 2.1.3 (Iwasawa-Zerlegung). *Sei A die Gruppe aller Diagonalmatrizen in G mit positiven Einträgen.*

Sei N die Gruppe aller Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $s \in \mathbb{R}$. Dann gilt $G = ANK$. Genauer ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : A \times N \times K &\to G, \\ (a, n, k) &\mapsto ank \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus.

Beweis. Sei $g \in G$, und sei $gi = x + yi$. Dann gilt mit

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{y} & \\ & 1/\sqrt{y} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad n = \begin{pmatrix} 1 & x/y \\ & 1 \end{pmatrix},$$

schon $gi = ani$ und so liegt $g^{-1}an$ in K, was bedeutet, dass es ein $k \in K$ mit $g = ank$ gibt. Mit Hilfe der expliziten Formel für gz oben im Fall $z = i$, konstruiert man die inverse Abbildung zu ψ wie folgt. Sei

$$\phi : G \to A \times N \times K$$

gegeben durch $\phi(g) = (\underline{a}(g), \underline{n}(g), \underline{k}(g))$, wobei

$$\begin{aligned} \underline{a}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} & \\ & \sqrt{c^2+d^2} \end{pmatrix}, \\ \underline{n}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & ac+bd \\ & 1 \end{pmatrix}, \\ \underline{k}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} \begin{pmatrix} d & -c \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine Rechnung zeigt, dass $\phi\psi = \mathrm{Id}$ und $\psi\phi = \mathrm{Id}$. □

Für $x, t, \theta \in \mathbb{R}$s schreiben wir auch

$$a_t := \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \in A$$

$$n_x := \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \in N$$

$$k_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in K.$$

Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ist genau dann glatt, wenn die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$(t, x, \theta) \ \mapsto \ f(a_t n_x k_\theta)$$

glatt ist. Wir schreiben $C^\infty(G)$ für den Raum der glatten Funktionen und $C_c^\infty(G)$ für den Raum der glatten Funktionen mit kompakten Trägern.

Satz 2.1.4. *Die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist unimodular.*

Beweis. Sei $\phi : G \to \mathbb{R}_+^\times$ ein stetiger Gruppenhomomorphismus. Wir zeigen dass $\phi \equiv 1$. Zuerst beachte, dass $\phi(K) = 1$ da K kompakt ist. da ϕ auf A ein stetiger Gruppenhomomorphismus ist, existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass $\phi(a_t) = e^{tx}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$. Sei $w = \left(\begin{smallmatrix} & -1 \\ 1 & \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $w a_t w^{-1} = a_{-t}$ und daher $e^{tx} = \phi(a_t) = \phi(w a_t w^{-1}) = e^{-tx}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, so dass $x = 0$ folgt und damit $\phi(A) = 1$. Ebenso ist $\phi(n_x) = e^{rx}$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Wegen $a_t n_x a_t^{-1} = n_{e^{2t}x}$ folgt $e^{rs} = e^{re^{2t}s}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, so dass $r = 0$ und damit

$\phi(N) = 1$. Wegen der Iwasawa-Zerlegung folgt $\phi \equiv 1$. $\square$

Wir schreiben $\underline{t}(g)$ für das eindeutig bestimmte $t \in \mathbb{R}$ mit $\underline{a}(g) = a_t$, d.h., so dass gilt

$$\underline{a}(g) = a_{\underline{t}(g)}.$$

Satz 2.1.5. *Für jede Wahl von Haar-Maßen auf drei der vier Gruppen G, A, N, K existiert genau ein Haar-Maß auf der vierten, so dass für jedes $f \in L^1(G)$ gilt*

$$\int_G f(x)\,dx = \int_A \int_N \int_K f(ank)\,dk\,dn\,da.$$

Für $\phi \in L^1(K)$ und $x \in G$ gilt

$$\int_K \phi(k)\,dk = \int_K \phi(\underline{k}(kx))\,e^{\underline{t}(kx)}\,dk.$$

Normalisierung. Von jetzt an normalisieren wir die Haar-Maße wie folgt. Auf K wählen wir das Maß mit Volumen 1. Auf A wählen wir das Maß dt, wobei $t = \underline{t}(a)$ und auf N wählen wir $\int_{\mathbb{R}} f(n_s)ds$. Man beachte, dass mit dieser Normalisierung auf der oberen Halbebene $G/K \cong \mathbb{H}$ das Maß $\frac{dx\,dy}{2y^2}$ induziert wird.

Beweis. Sei $B = AN$ die Untergruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen. Man rechnet nach, dass $db = dadn$ ein Haar-Maß auf B ist und dass B nicht unimodular ist. In der Tat gilt $\Delta_B(a_t n) = e^{-2t}$, was aus der Gleichung $a_s n_x a_t n_y = a_{s+t} n_{y+e^{-2t}x}$ folgt. Sei $\underline{b} : G \to B$ die Projektion $\underline{b}(g) = \underline{a}(g)\underline{n}(g)$. Die Abbildung $B \to G/K \cong \mathbb{H}$, $b \to bK$ ist ein B-äquivarianter Homöomorphismus. Jedes G-invariante Maß auf G/K liefert ein Haar-Maß auf B und da diese Maße jeweils eindeutig sind mit auf Skalierung, folgt, dass jedes B-invariante Maß auf G/K schon G-invariant ist. Die Formel $\int_G f(x)\,dx = \int_{G/K}\int_K f(xk)\,dk\,dx$ führt zu $\int_G f(x)\,dx = \int_B\int_K f(bk)\,dk\,db$. Da $db = da\,dn$, folgt die Integralformel.

Für die zweite Aussage sei $\phi \in L^1(K)$. Sei $\eta \in L^1(B)$ und sei $g(bk) = \eta(b)\phi(k)$. Dann liegt g in $L^1(G)$. Da G unimodular ist, gilt für $y \in G$

$$\begin{aligned}
\int_B\int_K \eta(b)\phi(k)\,dk\,db &= \int_G g(y)\,dy = \int_G g(yx)\,dy \\
&= \int_G \eta(\underline{b}(yx))\phi(\underline{k}(yx))\,dy \\
&= \int_B\int_K \eta(\underline{b}(bkx))\phi(\underline{k}(kx))\,dk\,db \\
&= \int_B\int_K \eta(b\underline{b}(kx))\phi(\underline{k}(kx))\,dk\,db \\
&= \int_B\int_K \eta(b)\Delta_B(\underline{b}(kx))^{-1}\phi(\underline{k}(kx))\,dk\,db \\
&= \int_B\int_K \eta(b)e^{2\underline{t}(kx)}\phi(\underline{k}(kx))\,dk\,db,
\end{aligned}$$

wobei wir $\underline{k}(bg) = \underline{k}(g)$ für alle $b \in B$, $g \in G$ und $\underline{t}(\underline{b}(kx)) = \underline{t}(kx)$ für alle $b \in B, k \in K$ und $x \in G$ benutzt haben. Da η beliebig ist, folgt der Satz. □

2.2 Hyperbolische Geometrie

Sei $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ in $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Für $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\frac{d}{dz} gz = \frac{d}{dz}\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}.$$

Da andererseits $\mathrm{Im}(gz) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|cz+d|^2}$, folgt $\left|\frac{d}{dz}gz\right| = \frac{\mathrm{Im}(gz)}{\mathrm{Im}(z)}$, oder

$$\frac{\left|\frac{d}{dz}gz\right|}{\mathrm{Im}(gz)} = \frac{\left|\frac{d}{dz}z\right|}{\mathrm{Im}(z)}.$$

Das bedeutet, dass die Riemannsche Metrik $\frac{dx^2+dy^2}{y^2} = \frac{1}{y^2}\langle .,.\rangle_{\mathrm{eukl}}$ invariant ist unter der Gruppenaktion von G auf $\mathbb{H}$. Man nennt sie die **hyperbolische Metrik**. Für einen stetig differenzierbaren Weg $p : [0,1] \to \mathbb{H}$ ist die induzierte ehyperbolische Länge gleich

$$L(p) = \int_0^1 \frac{|p'(t)|}{\mathrm{Im}(p(t))}\,dt.$$

Es folgt dass $L(p) = L(g \circ p)$ für jedes $g \in G$, also ist die Länge G-invariant. Der **hyperbolische Abstand** zweier Punkte $z, w \in \mathbb{H}$ ist definiert als

$$\rho(z,w) = \inf_p L(p),$$

wobei das Infimum über alle Wege p erstreckt wird, die $p(0) = z$ und $p(1) = w$ erfüllen.

Lemma 2.2.1. *Für je zwei Punkte $z, w \in \mathbb{H}$ gibt es ein $g \in G$ so dass $gz = i$ und $gw = yi$ für ein $y \geq 1$.*

Beweis. Die Aktion von G ist transitiv, also gibt es $h \in G$ mit $hz = i$. Wir zeigen, dass es ein $k \in K$ gibt, so dass $g = kh$ die Behauptung erfüllt. Hierfür müssen wir zeigen, dass es zu jedem $z \in \mathbb{H}$ ein $k \in K$ gibt, so dass $kz = yi$ für ein $y \geq 1$. Die Abbildung $\theta \mapsto k_\theta z$ ist stetig, für $\theta = 0$ ist $k_\theta z = z$ und für $\theta = \pi/2$ ist $k_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, also $k_{\pi/2}z = -1/z$. Damit haben die Realteile von z und $k_{\pi/2}z$ entgegengesetztes Vorzeichen. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $k \in K$ so dass $\mathrm{Re}(kz) = 0$. Ist nun $kz = yi$ mit $y < 1$, dann ersetzen wir k mit $k_{\pi/2}k$ und der Beweis ist beendet. $\square$

Lemma 2.2.2. *Der hyperbolische Abstand definiert eine Metrik auf* $\mathbb{H}$*. Diese ist G-invariant, d.h.,* $\rho(gz, gw) = \rho(z, w)$ *gilt für alle* $z, w \in \mathbb{H}$*,* $g \in G$*. Für* $z, w \in \mathbb{H}$ *gilt*

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \overline{w}| + |z - w|}{|z - \overline{w}| - |z - w|},$$

und

$$2 \cosh \rho(z, w) = 2 + \frac{|z - w|^2}{\mathrm{Im}(z)\,\mathrm{Im}(w)}.$$

Beweis. Die G-Invarianz folgt aus der Invarianz der Länge. Die Axiome eine Metrik sind klar aus der Definition. Für die explizite Formel beginnen wir mit dem Fall $z = i$ und $w = yi$ mit $y \geq 1$. Für jeden Weg p mit $p(0) = i$ und $p(1) = yi$ gilt

$$L(p) = \int_0^1 \sqrt{\mathrm{Re}(p'(t))^2 + \mathrm{Im}(p'(t))^2} \frac{dt}{\mathrm{Im}(p(t))}.$$

Dies wird minimiert vom Weg $p(t) = ity$, da für jeden Weg $p = \mathrm{Re}(p) + i\,\mathrm{Im}(p)$ der Weg $i\,\mathrm{Im}(p)$ ebenso die Punkte i und yi verbindet. Es folgt $\rho(i, yi) = \log y$ und damit die Behauptung im Spezialfall. Die Äquivalenz der ersten und zweiten Formel sind klar, ebenso ist die G-Invarianz der rechten Seite der zweiten Formel klar. Hieraus folgt die G-Invarianz der rechten Seite der ersten Formel und damit die Behauptung. □

Die Operation von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}$ setzt sich auf den Rand

$$\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \infty$$

fort. Die biholomorphe **Cayley-Abbildung**:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &\to \mathbb{E}, \\ z &\mapsto \frac{z - i}{z + i} \end{aligned}$$

bildet den Rand $\partial\mathbb{H}$ auf den Rand $\mathbb{T}$ der **Einheitskreisscheibe**

$$\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

ab.

2.3 Die Cartan-Zerlegung

Sei A^+ die Teilmenge von A bestehend aus allen Diagonalmatrizen der For $\begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix}$ mit $t > 0$. Sei $\overline{A^+} = A^+ \cup \{1\}$ der Abschluss in G.

Satz 2.3.1 (Cartan-Zerlegung). *Die Gruppe G kann als $G = K\overline{A^+}K$ geschrieben werden, d.h. jedes $x \in G$ ist von der Form $x = k_1 a k_2$ mit $a \in \overline{A^+},\ k_1, k_2 \in K$. Das Element a ist durch x eindeutig bestimmt. Ist $a \neq 1$, was bedeutet, dass $x \notin K$, dann sind k_1 und k_2 bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmt.*

Für $f \in L^1(G)$ gilt die Integralformel

$$\int_G f(x)\,dx = \pi \int_K \int_0^\infty \int_K f(ka_t l)(e^{2t} - e^{-2t})\,dk\,dt\,dl.$$

Beweis. Für $x \in G$ ist die Matrix xx^t symmetrisch und positiv definit. Da sie Determinante 1 hat, existieren $k \in K$ und $t \geq 0$, so dass kxx^tk^t die Diagonalmatrix mit Einträgen e^t, e^{-t} ist. Für zwei Elemente $x, x_1 \in G$ ist die Bedingung $xx^t = x_1x_1^t$ äquivalent zu $1 = x^{-1}(x_1x_1^t)(x^t)^{-1} = (x^{-1}x_1)(x^{-1}x_1)^t$. Die letzte ist äquivalent zu $x^{-1}x_1 \in K$. Also gibt es $k' \in K$ mit $x = k^{-1}a_tk'$.

Für die Eindeutigkeit beachte, dass e^t der grössere der beiden Eigenwerte von xx^t ist. Für die Eindeutigkeit von k_1, k_2 nimm an, dass

$a \in A^+$ und $k_1 a k_2 = l_1 a l_2$ mit $k_1, k_2, l_1, l_2 \in K$. Dann gilt $ak_2 l_2^{-1} = k_1^{-1} l_1 a$. Aber die Gleichung $ak = k'a$ mit $k, k' \in K$ impliziert $k = k' = \pm 1$ wie wir nun zeigen. Sei $a = a_t, k = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right), k' = \left(\begin{smallmatrix} c & -d \\ d & c \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^t a & -e^t b \\ e^{-t} b & e^{-t} a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = ak = k'a \\ &= \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t c & -e^{-t} d \\ e^t d & e^{-t} c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Betrachte die Norm der ersten Spalte dieser Matrix:

$$e^t = e^t(c^2 + d^2) = e^t a^2 + e^{-t} b^2 = e^t a^2 + e^{-t}(1 - a^2),$$

oder

$$e^t(1 - a^2) = e^{-t}(1 - a^2),$$

hieraus folgt $a = \pm 1$ und daher $b = 0$. Aber dann ist auch $d = 0$ und die Behauptung folgt. Das bedeutet $k_2 l_2^{-1} = k_1^{-1} l_1 = \pm 1$ und damit die Behauptung.

Sei $M = \{\pm 1\} \subseteq K$. Um die Integralformel zu zeigen, betrachte die Abbildung $\phi : K/M \times A^+ \to AN \setminus \{1\}$ definiert durch

$$\phi(kM, a) = \underline{a}(ka)\underline{n}(ka).$$

Lemma 2.3.2. *Die Abbildung ϕ ist ein C^1-Diffeomorphismus. In den Koordinaten $\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}_{>0} \ni (\theta, s) \mapsto (k_\theta M, a_s)$ auf $K/M \times A$ und $(t, x) \mapsto a_t n_x$ auf AN gilt für die Differentialmatrix*

$$|\det(D\phi)(\theta, s)| = |e^{2s} - e^{-2s}|.$$

Beweis. Eine Rechnung zeigt

$$\phi(k_\theta, a_s) = \underline{a}(k_\theta a_s)\underline{n}(k_\theta, a_s) = a_t n_x,$$

wobei

$$t = -\frac{1}{2}\log\left(e^{2s}\sin^2\theta + e^{-2s}\cos^2\theta\right)$$
$$x = \left(e^{2s} - e^{-2s}\right)\sin\theta\cos\theta$$

Nach der Cartan-Zerlegung ist die Abbildung $K/M \times A^+ \to (G \smallsetminus K)/K$ bijektiv. Nach der Iwasawa-Zerlegung ist die Abbildung $AN \to G/K$ ebenfalls bijektiv, also ist ϕ bijektiv.

Die Abbildung ϕ ist stetig differenzierbar. Zeigen wir die behauptete Formel für das Differential, so folgt dass die Differentialmatrix invertierbar ist und die inverse Funktion ist ebenfalls stetig differenzierbar. Es gilt

$$\det(D\phi)(\theta, s) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial \theta} & \frac{\partial t}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{pmatrix} = \frac{\partial t}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial s} - \frac{\partial t}{\partial s}\frac{\partial x}{\partial \theta}.$$

Hieraus folgt das Lemma mit einer Rechnung. □

Die Transformationsformel für die Variablen $(x, t) = \phi(\theta, s)$ zeigt

$$\begin{aligned}
\int_G f(g)\,dg &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\int_K f(a_t n_y l)\,dl\,dy\,dt \\
&= \int_0^\pi \int_0^\infty \int_K f(k_\theta a_s l)(e^{2s} - e^{-2s})\,dl\,ds\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \int_K f(k_\theta a_s l)(e^{2s} - e^{-2s})\,dl\,ds\,d\theta \\
&= \pi \int_K \int_0^\infty \int_K f(k a_s l)(e^{2s} - e^{-2s})\,dl\,ds\,dk,
\end{aligned}$$

für jedes $f \in L^1(G)$, wobei der Übergang vom Integral über $[0, \pi]$ zum Integral über $[0, 2\pi]$ in der Mitte gerechtfertigt ist durch das Fakt, dass $k_{\theta+\pi}a_s = k_\theta a_s m$ mit $m = \pm 1 \in M$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $s > 0$. Der Beweis des Satzes ist beendet. □

Korollar 2.3.3. *Die Abbildung*

$$K\backslash G/K \to [2, \infty), \qquad x \mapsto \mathrm{tr}(x^t x)$$

ist eine Bijektion.

Beweis. Die Abbildung ist eine Bijektion, wenn man sie auf $\overline{A^+}$ einschränkt, also folgt das Korollar aus dem Satz. □

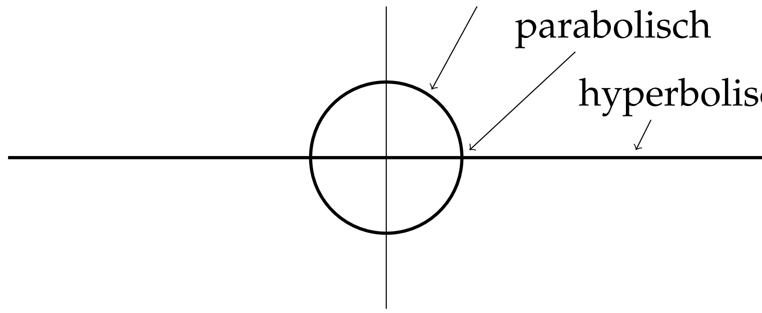
2.4 Konjugationsklassen

Ist $g \in G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, dann ist nach dem Jordan-Normalform-Satz das Element g in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ konjugiert zu einem Element der Form $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ oder zu $\begin{pmatrix} \mu & \\ & \nu \end{pmatrix}$ mit $\mu, \nu \in \mathbb{C}$. Da die Determinante Eins ist, folgt $\lambda^2 = 1$ oder $\mu\nu = 1$. Also ist $\lambda = \pm 1$ und im anderen Fall sind μ und $\nu = \mu^{-1}$ die Nullstellen eines reellen Polynoms (des charakteristischen Polynoms), also sind sie entweder beide reell oder komplex konjugiert zueinander.

Wir nennen $g \neq \pm 1$

$$\left.\begin{matrix} \text{elliptisch} \\ \text{parabolisch} \\ \text{hyperbolisch} \end{matrix}\right\} \text{falls} \left\{\begin{matrix} g \sim \begin{pmatrix} \mu & \\ & \mu^{-1} \end{pmatrix},\ \mu \notin \mathbb{R} \\ g \sim \begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ & \pm 1 \end{pmatrix} \\ g \sim \begin{pmatrix} \mu & \\ & \mu^{-1} \end{pmatrix},\ \mu \in \mathbb{R}. \end{matrix}\right.$$

Je nach Lage eines Eigenwerts in der komplexen Ebene ergibt sich folgendes Bild:



Proposition 2.4.1. *Sei $g \in G = SL_2(\mathbb{R})$.*

(a) $g = \pm 1 \;\Leftrightarrow\; g$ *operiert trivial auf* $\mathbb{H}$.

(b) g *ist elliptisch* $\Leftrightarrow$ g *hat genau einen Fixpunkt in* $\mathbb{H} \Leftrightarrow |\operatorname{tr}(g)| < 2$.

(c) g *ist hyperbolisch* $\Leftrightarrow$ g *hat genau zwei Fixpunkte im Rand von* $\mathbb{H} \Leftrightarrow$ $|\operatorname{tr}(g)| > 2$.

(d) g *ist parabolisch* $\Leftrightarrow$ g *hat genau einen Fixpunkt im Rand von* $\mathbb{H}$.

Beweis. (a) $g = \pm 1$ operiert trivial. Sei umgekehrt $g \in G$ mit $gz = z$ für jedes $z \in \mathbb{H}$. Das bedeutet $z = \frac{az+b}{cz+d}$ wenn $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mit $z \to \infty$ folgt daraus $c = 0$, also $z = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, so dass $a/d = 1$ und $b = 0$ folgt. Damit ist $g = \begin{pmatrix} a & \\ & a \end{pmatrix}$ mit $\det g = 1$ folgt $a^2 = 1$, also $g = \pm 1$.

(b) Hat g einen Fixpunkt in $\mathbb{H}$, dann kann man, da G transitiv operiert, nach Konjugation annehmen, dass $gi = i$, also $g \in K$, damit $g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ und damit ist g konjugiert zu $\begin{pmatrix} \varepsilon & \\ & \overline{\varepsilon} \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon = a + bi \in \mathbb{T}$. Hat g einen weiteren Fixpunkt in $\mathbb{H}$, so folgt leicht $g = \pm 1$. Es folgt also, dass g elliptisch ist und Spurbetrag < 2 hat.

Ist g elliptisch, also $g \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & \\ & \overline{\varepsilon} \end{pmatrix}$ mit $\varepsilon = a + bi$, dann ist $g \sim \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in K$ und hat damit einen Fixpunkt.

Ist $g \in G$ mit $t = |\operatorname{tr}(g)| < 2$, und ist α ein Eigenwert, also $\alpha^2 \pm \alpha t + 1 = 0$, also $\alpha = \mp\frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{t^2-4}}{2}$ und damit $\alpha \notin \mathbb{R}$ und $|\alpha|^2 = 1$.

(c) Das hyperbolische Element $\left(\begin{smallmatrix} a & \\ & 1/a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0, \pm 1\}$ hat im Rand genau die Fixpunkte 0 und ∞. Für $a \in \mathbb{R}^\times$ gilt $|a + 1/a| \geq 2$ und es gilt Gleichheit $\Leftrightarrow a = \pm 1$.

Hat g zwei Fixpunkte im Rand, so kann man nach Konjugation annehmen, dass dies die Punkte 0 und ∞ sind, woraus dann $g = \left(\begin{smallmatrix} a & \\ & 1/a \end{smallmatrix}\right)$ für ein $a \in \mathbb{R} \smallsetminus 0, \pm 1$ folgt. Gilt schliesslich $|\operatorname{tr}(g)| > 2$, dann hat das charakteristische Polynom zwei reelle Nullstellen.

(d) Ist $g = \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 1 \\ & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann fixiert g genau den Randpunkt ∞. Hat umgekehrt g genau einen Fixpunkt am Rand, so kann man nach Konjugation annehmen, dass dieser gleich ∞ ist. Dann ist $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ & 1/a \end{smallmatrix}\right)$. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann $gx = a^2 x + b$. Da $gx = x$ keine Lösung hat, folgt $a^2 = 1$, also $a = 1/a = \pm 1$ und nach Konjugation erhält man $b = 1$. □

2.5 Lie-Algebra

Definition 2.5.1. Sei $s\ell_2(\mathbb{R})$ die Menge aller reellen 2×2 Matrizen mit Spur Null.

Proposition 2.5.2. *Für* $A \in M_2(\mathbb{R})$ *konvergiert die* **Exponentialreihe**

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

in $M_2(\mathbb{R})$. *Es gilt* $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ *falls* $AB = BA$. *Ferner ist*

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)).$$

Beweis. Sei $\|A\| = \|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2}$ die euklidische Norm. Für zwei

Matrizen A, B gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 = \sum_{i,j} (AB)_{ij}^2 &= \sum_{i,j} \left(\sum_k A_{ik} B_{kj} \right)^2 \\
&\leq \sum_{i,j} \left(\sum_k A_{ik}^2 \right) \left(\sum_n B_{nj}^2 \right) = \|A\|^2 \|B\|^2 .
\end{aligned}$$

Damit folgt $\left\| \frac{1}{n!} A^n \right\| \leq \frac{1}{n!} \|A\|^n$ und die Reihe konvergiert absolut mit der reellen Exponentialreihe als Dominante. Gilt $AB = BA$, dann folgt $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$ und daher

$$\begin{aligned}
\exp(A+B) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (A+B)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} A^k B^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+j=n} \frac{1}{k!j!} A^k B^j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} B^j \right) \\
&= \exp(A) \exp(B).
\end{aligned}$$

Zum Schluss zu $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$. Wegen $\exp(SAS^{1}) = S \exp(A) S^{-1}$ sind beide Seiten der Gleichung stabil unter Konjugation. Des Weiteren können die obigen Argumente auch für komplexe Matrizen angewendet werden. Da über $\mathbb{C}$ jede Matrix konjugiert ist zu einer oberen Dreiecksmatrix, reicht es, die Aussage für eine obere Dreiecksmatrix zu zeigen. Nun ist

$$\begin{aligned}\exp\begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix}^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} a^n & * \\ & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & * \\ & e^d \end{pmatrix},\end{aligned}$$

so dass

$$\det(\exp(A)) = \det\left(\exp\begin{pmatrix} a & b \\ & d \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} e^a & * \\ & e^d \end{pmatrix} = e^{a+d} = e^{\mathrm{tr}(A)}. \qquad \square$$

Lemma 2.5.3. *Die Exponentialabbildung*

$$\exp : \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

ist unendlich oft differenzierbar und hat im Punkt 0 *invertierbares Differential. Insbesondere bildet sie eine Umgebung der Null in* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *diffeomorph auf eine Umgebung der Eins in* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ *ab.*

Beweis. Die Exponentialfunktion ist durch eine überall konvergente Potenzreihe gegeben, ist also glatt. Die Potenzreihendarstellung impliziert

$$\exp(A) = 1 + A + \phi(A)$$

mit $\phi(A) = A^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{(n+2)!}$. Damit geht fuer $A \to 0$ die Funktion ϕ schneller gegen Null als die Norm und es folgt nach der Definition des totalen Differentials, dass $D\exp(0) = \mathrm{Id}$, damit ist diese Abbildung invertierbar. $\square$

Insbesondere folgt, dass exp den Unterraum $s\ell_2(\mathbb{R})$ nach $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ abbildet. Ist $g \in G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, sei dann $r_g : G \to G$, $x \mapsto xg$. Dann bildet das Differential Dr_g den Tangentialraum T_eG bijektiv auf den

Tangentialraum T_gG ab. Damit haben wir das folgende Lemma bewiesen.

Definition 2.5.4. Ab jetzt schreiben wir

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = s\ell_2(\mathbb{R})$$

und

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = s\ell_2(\mathbb{C}) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}.$$

Lemma 2.5.5. *Für jedes $y \in G$ liefert die Abbildung*

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g} \to T_gG, \\ &X \mapsto \left(f \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\exp(tX)y) \right), \quad f \in C^\infty(G) \end{aligned}$$

eine kanonische Identifikation des Tangentialraums mit $\mathfrak{g}$. Wir schreiben dann auch Xf für die Funktion $Xf(y) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} f(\exp(tX)y)$. Insbesondere ist eine Funktion f auf G genau dann glatt, wenn $X_1 \cdots X_n f$ existiert für jedes Tupel $X_j \in \mathfrak{g}$.

3 Darstellungen

3.1 Vektorwertige Integrale

Sei V ein Banach-Raum. Fuer eine Funktion $f : X \to V$ mit Werten in V wollen wir ein Integral $\int_X f\, d\mu \in V$ definieren, so dass fuer jedes stetige lineare Funktional $\alpha : V \to \mathbb{C}$ gilt

$$\alpha\left(\int_X f\, d\mu\right) = \int_X \alpha(f)\, d\mu.$$

Sei also $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Eine **einfache Funktion** ist eine Funktion $s : X \to V$, die in der Form

$$s = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{A_j} b_j$$

geschrieben werden kann, wobei $A_1, \dots, A_n$ messbare Mengen endlichen Maßes sind, also $\mu(A_j) < \infty$ und $b_j \in V$ irgendwelche Vektoren. Man kann eine solche Darstellung immer so waehlen, dass die A_j paarweise disjunkt sind. Wir definieren das **Integral** der einfahcen Funktion s als

$$\int_X s \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) b_j \ \in \ V.$$

Es gilt dann $\left\| \int_X s \, d\mu \right\| \le \int_X \|s\| \, d\mu$ und fuer jedes lineare Funkttional $\alpha : V \to \mathbb{C}$ gilt $\alpha\left(\int_X s \, d\mu\right) = \int_X \alpha(s) \, d\mu$.

Wir versehen V mit der Borel σ-Algebra. Eine messbare Funktion $f : X \to V$ heisst **integrierbar** oder **Bochner-integrierbar**, fall es eine Folge s_n einfacher Funktionen gibt, so dass

$$\lim_{n \to \infty} \int_X \left\| f - s_n \right\| \, d\mu = 0.$$

In diesem Fall heiss (s_n) eine *approximierende Folge*.

Proposition 3.1.1. (a) *Sei f integrierbar und (s_n) eine approximierende Folge. Dann konvergiert die Folge von Vektoren $\int_X s_n \, d\mu$. Der Limes dieser Folge haengt nicht von der Wahl der approximierenden Folge ab.*

Man definiert daher das Integral von f als

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int_X s_n \, d\mu.$$

(b) *Fuer jede integrierbare Funktion f gilt*

$$\left\| \int_X f\, d\mu \right\| \le \int_X \left\| f \right\| \, d\mu \ < \ \infty.$$

(c) *Sei f integrierbar. Fuer jeden stetigen linearen Operator $T : V \to W$ zu einem Banach-Raum W gilt*

$$T\left(\int_X f\, d\mu\right) = \int_X T(f)\, d\mu.$$

(d) *Iist $V = \mathbb{C}$, dann stimmt das Bochner-Integral mit dem ueblichen Integral uebererein.*

Proof. Es reicht zu zeigen, dass fuer jede apprixmierende Folge (s_n) die Folge $\int_X s_n\, d\mu$ konvergiert, denn ist (t_n) eine weitere approximierende Folge, Dann ist die Folge (r_n) mit $r_{2n} = s_n$ und $r_{2n-1} = t_n$ ebenfalls eine approximierende Folge. Da dann $\int_X r_n\, d\mu$ konvergiert, muessen die Limiten von $\int_X s_n\, d\mu$ und $\int_X t_n\, d\mu$ uebereinstimmen.

Um die Konvergenz zu zeigen, reicht es, zu zeigen, dass die Folge von Vektoren $\int_X s_n\, d\mu$ eine Cauchy-Folge ist. Fuer $m, n \in \mathbb{N}$ betrachte

$$\begin{aligned}
\left\| \int_X s_m\, d\mu - \int_X s_n\, d\mu \right\| &= \left\| \int_X s_m - s_n\, d\mu \right\| \\
&\le \int_X \| s_m - s_n \| \, d\mu \\
&\le \int_X \left\| s_m - f \right\| \, d\mu + \int_X \left\| f - s_n \right\| \, d\mu.
\end{aligned}$$

Fuer gegebenes $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein n_0, so dass fuer $m, n \ge n_0$ die beiden Summanden in der letzten Zeile $< \varepsilon/2$ sind. Damit ist $\int_X s_n\, d\mu$ in der tat eine Cauchy-Folge.

Um (b) zu beweisen, beachte dass die Ungleichung

$\big|\|f\| - \|s_n\|\big| \leq \|f - s_n\|$ zeigt, dass die $\mathbb{C}$-wertige Funktion $\|f\|$ integrierbar ist und dass $\|s_n\|$ gegen $\|f\|$ in $L^1(X)$ konvergiert. Es folgt

$$\left\| \int_X f\, d\mu \right\| = \lim_n \left\| \int_X s_n\, d\mu \right\| \ \leq\ \lim_n \int_X \|s_n\|\, d\mu = \int_X \|f\|\, d\mu.$$

Schliesslich zu Teil (c). Die Stetigkeit und Linearitaet von T implizieren

$$T\left(\int_X f\, d\mu \right) = \lim_n \int_X T(s_n)\, d\mu.$$

Wir wollen zeigen, dass die rechte Seite gleich $\int_X T(f)\, d\mu$ ist. Da T stetig ist, existiert ein $C > 0$, so dass $|T(v)| \leq C\,\|v\|$ fuer jedes $v \in V$ gilt. Insbesondere gilt $\|T(f)\| \leq C\,\|f\|$ und daher ist $T(f)$ eine integrierbare Funktion. Wir koennen abschaetzen

$$\begin{aligned} \left\| \int_X T(f)\, d\mu - \int_X T(s_n)\, d\mu \right\| &\leq \int_X \|T(f) - T(s_n)\|\, d\mu \\ &= \int_X \|T(f - s_n)\|\, d\mu \\ &\leq C \int_X \|f - s_n\|\, d\mu. \end{aligned}$$

Dies geht gegen Null und damit folgt die Behauptung. Teil (d) schliesslich folgt aud der letzten Abschaetzung, angewendet auf die Ooperator Id. □

Proposition 3.1.2. *Sei M eine Mannigfaltigkeit. Fuer eine stetige Funktion $f : M \to V$ in einen Banach-Raum V sind aequivalent:*

- *f ist integrierbar,*
- *$\int_X \|f\|\, d\mu < \infty$.*

Proof. Ist f integrierbar, dann ist nach Proposition 3.1.1 (b) auch die Funktion $\|f\|$ integrierbar.

Fuer die Umkehrung nimm an, dass $\int_X \left\| f \right\| \, d\mu < \infty$ gilt. Da M ein σ-kompakter Raum ist, ist das Bild $f(M) \subset V$ ebenfalls σ-kompakt. Eine σ-kompakte Teilmenge eines metrischen Raums ist separabel, also sei $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzaehlbare dichte Teilmenge von $f(M)$. Fuer $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ sei A_n^δ die Menge aller $x \in M$ so dass $\left\| f(x) \right\| \geq \delta$ und $\left\| f(x) - d_n \right\| < \delta$. Da f messbar ist, ist dies eine messbare Menge. Wir machen diese Folge paarweise disjunkt:

$$B_n^\delta := A_n^\delta \smallsetminus \bigcup_{k<n} A_k^\delta.$$

Die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^\delta = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^\delta$ ist gleich $f^{-1}(f(X) \smallsetminus B_\delta(0))$, da D dicht in $f(X)$ liegt. Da $\left\| f \right\|$ integrierbar ist, hat die Menge $\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} B_n^\delta$ endliches Maß. Sei $s_n = \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_{B_j^{1/n}} d_j$. Dann ist s_n eine einfache Funktion. Wir zeigen, dass (s_n) punktweise gegen f konvergiert. Sei $x \in X$. Ist $f(x) = 0$, dann ist $s_n(x) = 0$ fuer jedes n. Nimm also $f(x) \neq 0$ an. Dann ist $\left\| f(x) \right\| \geq \frac{1}{n}$ fuer ein $n \in \mathbb{N}$. Fuer jedes $m \geq n$ gilt $x \in \bigsqcup_{\nu\in\mathbb{N}} B_\nu^{1/m}$, also existiert fuer jedes $m \geq n$ ein eindeutig bestimmtes ν_0 mit $x \in B_{\nu_0}^{1/m}$, also $s_m(x) = d_{\nu_0}$ und $\left\| f(x) - d_{\nu_0} \right\| < \frac{1}{m}$, so dass $s_n \to f$ folgt.

Nach Konstruktion gilt auch $\|s_n\| \leq 2 \left\| f \right\|$. Daher gilt punktweise $\left\| f - s_n \right\| \to 0$ und $\left\| f - s_n \right\| \leq \left\| f \right\| + \|s_n\| \leq 3 \left\| f \right\|$, so dass nach dem Satz ueber dominierte Konvergenz gilt

$$\int_X \left\| f - s_n \right\| \, d\mu \;\to\; 0. \qquad \square$$

Korollar 3.1.3. *Sei X eine Mannigfaltigkeit, V ein Bachan-Raum und μ ein Radon-Maß auf X. Dann ist jede stetige Funktion $f : X \to V$ mit kompaktem Traeger integrierbar.*

Proof. Da die $\mathbb{C}$-wertige Funktion $\left\| f \right\|$ ebenfalls stetig mit kompaktem Traeger ist, ist sie integrierbar. Das Korollar folgt daher aus der

Proposition 3.1.2. $\square$

3.2 Das Lemma von Schur

Für einen Banach-Raum V, sei $GL(V)$ die Menge aller bijektiven, stetigen Operatoren $T : V \to V$. Nach dem Satz der offenen Abbildung ist für jedes $T \in GL(V)$ der Operator T^{-1} wieder stetig, also ist $GL(V)$ eine Gruppe.

Definition 3.2.1. Sei G eine topologische Gruppe. Eine **Darstellung** von G auf einem Banach-Raum V ist ein Gruppenhomomorphismus $\pi : G \to GL(V)$, so dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times V &\to V, \\ (g, v) &\mapsto \pi(g)v, \end{aligned}$$

stetig ist. Ist V ein Hilbert-Raum, so nennt man π eine **Hilbert-Darstellung**.

Lemma 3.2.2. *Sei π ein Gruppenhomomorphismus von der topologischen Gruppe G nach $GL(V)$, wobei V ein Banach-Raum ist. Die Abbildung π ist genau dann eine Darstellung, wenn*

(a) *es gibt einen dichten Teilraum V_0 von V so dass für jedes $v_0 \in V_0$ die Abbildung $g \mapsto \pi(g)v_0$ stetig im Punkt $g = 1$ ist und*

(b) *die Abbildung $g \mapsto \left\|\pi(g)\right\|_{\mathrm{Op}}$ auf einer Einsumgebung (und damit auf jedem Kompaktum) in G beschränkt ist.*

Beweis. Sei π eine Darstellung. Dann ist (a) offensichtlich erfüllt. Für (b) beachte, dass es für für jede Umgebung Z der Null in V eine Umgebung Y der Null in V und eine Umgebung U der Eins in G gibt, so dass $\pi(U)Y \subset Z$. Damit folgt (b).

Für die Rückrichtung schreibe

$$\begin{aligned}\left\|\pi(g)v - \pi(g_0)v_0\right\| &\le \left\|\pi(g_0)\right\|_{\mathrm{Op}} \left\|\pi(g_0^{-1}g)v - v_0\right\| \\ &\le \left\|\pi(g_0)\right\|_{\mathrm{Op}} \left\|\pi(g_0^{-1}g)(v - v_0)\right\| \\ &\quad + \left\|\pi(g_0)\right\|_{\mathrm{Op}} \left\|\pi(g_0^{-1}g)v_0 - v_0\right\| \\ &\le \left\|\pi(g_0)\right\|_{\mathrm{Op}} \left\|\pi(g_0^{-1}g)\right\|_{\mathrm{Op}} \|v - v_0\| \\ &\quad + \left\|\pi(g_0)\right\|_{\mathrm{Op}} \left\|\pi(g_0^{-1}g)v_0 - v_0\right\|.\end{aligned}$$

Nach den Annahmen (a) und (b) werden beide Terme rechts klein, wenn g nah bei g_0 und v nah bei $v_0 \in V_0$ ist. Ist $u \in V$ beliebig, so gilt

$$\left\|\pi(g)v - \pi(g_0)u\right\| \le \left\|\pi(g)v - \pi(g_0)u_0\right\| + \left\|\pi(g_0)u_0 - \pi(g_0)u\right\|,$$

für ein $u_0 \in V_0$, das beliebig nah bei u gewählt werden kann. Die Behauptung folgt. □

Beispiele 3.2.3.

- Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, dann hat man eine natürliche Darstellung auf $\mathbb{C}^2$ gegeben durch Matrixmultiplikation.
- Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und sei P_k der Raum der Polynome $p(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$, die homogen vom Grad k sind. Dann ist

  $$x^k, x^{k-1}y, x^{k-2}, y^2, \ldots, y^k$$

  eine Basis von P_k, also $\dim(P_k) = k + 1$. Die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ operiert auf P_k durch die Darstellung δ_k gegeben durch

  $$\delta_k(g)p(x, y) = p((x, y)g).$$

  Hierbei ist $(x, y)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = (ax + cy, bx + dy)$. Dann ist δ_0 die triviale Darstellung. Die Darstellung δ_1 ist die natürliche zweidimensionale Darstellung. Die Darstellung δ_2 lässt sich in

Matrixform schreiben als

$$\delta_2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2ac & ad+bc & 2bd \\ c^2 & cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Definition 3.2.4. Sei V ein Hilbert-Raum. Eine Darstellung π auf V heisst **unitäre Darstellung**, falls $\pi(g)$ für jedes $g \in G$ unitär ist, wenn also $\langle \pi(g)v, \pi(g)w\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$ gilt.

Lemma 3.2.5. *Eine Darstellung π der Gruppe G auf einem Hilbert-Raum V ist genau dann unitär, wenn $\pi(g^{-1}) = \pi(g)^*$ für jedes $g \in G$ gilt.*

Proof. Ein Operator T ist genau dann unitär, wenn er invertierbar ist und $T^* = T^{-1}$ gilt. Ist π eine Darstellung, dann ist jedes $\pi(g)$ automatisch invertierbar mit Inversem $\pi(g^{-1})$. Damit folgt die Behauptung. □

Beispiele 3.2.6. • Sei $G = SL_2(\mathbb{R})$. Dann ist $x \to L_x$ mit $L_x\phi(y) = \phi(x^{-1}y)$ eine unitäre Darstellung auf dem Raum $L^2(G)$. Man nennt L die **linksreguläre Darstellung** von G

Beweis. Jedes L_x ist unitär, denn wegen der Invarianz des Haar-Maßes gilt

$$\begin{aligned}\left\langle L_x\phi, L_x, \psi\right\rangle &= \int_G L_x\phi(y)\overline{L_x\psi(y)}\,dy \\ &= \int_G \phi(x^{-1}y)\overline{\psi(x^{-1}y)}\,dy \\ &= \int_G \phi(y)\overline{\psi(y)}\,dy = \left\langle \phi, \psi\right\rangle.\end{aligned}$$

Der Raum $C_c(G)$ aller stetigen Funktionen mit kompakten Trägern ist dicht in $L^2(G)$. Um zu sehen, dass L eine Darstellung ist, reicht es nach Lemma 3.2.2 zu zeigen, dass L auf $G \times E$ stetig ist. (Die

Bedingung (b) aus dem Lemma ist wegen der Unitarität erfüllt.) Wir haben also zu zeigen, dass für $f \in C_c(G)$ die Abbildung $G \to L^2(G)$, $x \mapsto L_x f$ stetig in $x = 1$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da jede stetige Funktion mit kompaktem Träger gleichmässig stetig ist, gibt es eine Einsumgebung $U \subset G$ so dass $|f(z) - f(y)| < \sqrt{\varepsilon/C}$ falls $yz^{-1} \in U$. Da G lokalkompakt ist, können wir annehmen, dass U kompakt ist. Dann ist auch $U \operatorname{supp}(f)$ kompakt. Sei C das Haar-Maß dieser kompakten Menge. Ist also $x \in U$, so folgt für jedes $y \in G$, dass $|f(y) - f(x^{-1}y)| < \sqrt{\varepsilon/C}$. Daher ist

$$\begin{aligned}\left\|f - L_x f\right\|_2^2 &= \int_G |f(y) - f(x^{-1}y)|^2\, dx \\ &< \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon.\end{aligned}$$ □

Definition 3.2.7. Seien (π_1, V_1) und (π_2, V_2) zwei unitäre Darstellungen. Auf der direkten Summe $V = V_1 \oplus V_2$ gibt es die **direkte Summendarstellung** $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$. Allgemeiner, ist $\{\pi_i : i \in I\}$ eine Familie von unitären Darstellungen auf Hilbert-Räumen V_i, so schreiben wir $\bigoplus_{i \in I} \pi_i$ für die direkte Summendarstellung der π_i, $i \in I$ auf dem Hilbert-Raum

$$\widehat{\bigoplus}_{i \in I} V_i = \left\{ v \in \prod_{i \in I} : \sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty \right\}.$$

Beispiel 3.2.8. Sei $H = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und sei $V = L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Sei π die linksreguläre Darstellung. Nach dem Satz über Fourier-Reihen bilden die Elemente $e_k(x) = e^{2\pi i k x}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. Es gilt $\pi(x)e_k(y) = e_k(y - x) = e^{2\pi i k(y-x)} = e_k(-x)e_k(y)$, also $\pi(x)e_k \in \mathbb{C}e_k$. Damit ist π eine direkte Summendarstellung auf $V = \widehat{\bigoplus}_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}e_k$.

Definition 3.2.9. Eine Darstellung (π, V_π) heisst **Unterdarstellung** einer

Darstellung (η, V_η), falls V_π ein abgeschlossener Unterraum von V_η ist und $\pi(x)$ die Einschränkung von $\eta(x)$ auf V_π ist. Daher liefert jeder abgeschlossene, G-stabile Unterraum eine Unterdarstellung.

Eine Darstellung heisst **irreduzibel**, wenn sie keine echte Unterdarstellung hat, also wenn die einzigen Unterdarstellungen der Nullraum und der ganze Raum sind.

Beispiel 3.2.10. Sei $\mathrm{U}(n)$ die Gruppe der $n \times n$ unitären Matrizen, also die Gruppe aller $u \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, so dass $uu^* = I$ (Einheitsmatrix), wobei $u^* = \bar{u}^t$. Die natürliche Darstellung von $\mathrm{U}(n)$ auf $\mathbb{C}^n$ ist irreduzibel (Übungsaufgabe).

Lemma 3.2.11. *(Schur) Sei (π, V_π) eine unitäre Darstellung einer topologischen Gruppe G. Dann sind äquivalent:*

(a) *(π, V_π) ist irreduzibel.*

(b) *Ist T ein beschränkter Operator auf V_π, so dass $T\pi(g) = \pi(g)T$ für jedes $g \in G$ gilt, dann ist $T \in \mathbb{C}\,\mathrm{Id}$. Man drückt diesen Sachverhalt auch dadurch aus, dass man schreibt*

$$\mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\pi) = \mathbb{C}\mathrm{Id}.$$

Beweis. (a)$\Rightarrow$(b): Sei $\mathcal{A} = \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\pi)$ die Algebra der G-Homomorphismen. Wir behaupten, dass mit $T \in \mathcal{A}$ auch $T^* \in \mathcal{A}$ folgt. Hierzu sei $g \in G$, dann gilt

$$T^*\pi(g) = (T^*\pi(g))^{**} = (\pi(g)^*T)^* = (\pi(g^{-1})T)^* = (T\pi(g^{-1}))^* = \pi(g)T^*.$$

Für $T \in \mathcal{A}$ schreiben wir $T = R + iS = \frac{1}{2}(T + T^*) + i\frac{1}{2i}(T - T^*)$, so sind R, S selbstadjungierte G-Homomorphismen. Es reicht also zu zeigen, dass jeder selbstadjungierte G-Homomorphismus in $\mathbb{C}\mathrm{Id}$ liegt. Sei also

$T = T^* \in \mathrm{End}_G(V_\pi)$. Dann gilt $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu(\lambda)$, wobei μ das Spektralmaß von T ist. Ist $g \in G$, dann ist $T = \pi(g^{-1})T\pi(g) = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu^g(\lambda)$, wobei $\mu(A) = \pi(g^{-1})\mu(A)\pi(g)$ für jede messbare Teilmenge $A \subset \mathbb{C}$. Daher ist μ^g ebenfalls ein Spektralmaß für T. Da das Spektralmaß aber eindeutig bestimmt ist, ist $\mu = \mu^g$, also vertauscht auch jede Projektion $\mu(A)$ mit $\pi(G)$. Dann ist $\mu(A)(V_\pi)$ ein G-stabiler, abgeschlossener Unterraum, also gleich V_π oder gleich Null. Ist $A = B \sqcup C$, dass ist $\mu(A) = \mu(B) + \mu(C)$, ist also $\mu(A) \neq 0$, dann ist genau eine der Beiden Projektionen $\mu(B), \mu(C)$ gleich Null, die andere ist die Identität. Es folgt, dass es genau einen Punkt $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\mu(A) = \mathrm{Id} \iff \lambda_0 \in A$. Daher ist $T = \lambda_0 \mathrm{Id}$.

(b)$\Rightarrow$(a): Sei $0 \neq U \subset V_\pi$ ein G-stabiler abgeschlossener Unterraum und sei $P : V_\pi \to V_\pi$ die Orthogonalprojektion mit Bild U. Dann ist P ein G-Homomorphismus, also $P \in \mathbb{C}\mathrm{Id}$ und da $P \neq 0$ eine Projektion ist, folgt $P = \mathrm{Id}$, also $U = V_\pi$. □

Definition 3.2.12. Zwei unitäre Darstellungen π, η heissen **unitär äquivalent**, wenn es einen unitären Isomorphismus $T : V_\pi \to V_\eta$ gibt mit

$$T\pi(g) = \eta(g)T$$

für alle $g \in G$.

Beispiel 3.2.13. Sei $G = \mathbb{R}$ und sei $V_\pi = V_\eta = L^2(\mathbb{R})$. De Darstellung π ist durch $\pi(x)\phi(y) = \phi(x + y)$ gegeben und η durch $\eta(x)\phi(y) = e^{2\pi i x y}\phi(y)$. Die Fourier-Transformation ist ein unitärer G-Homomorphismus $V_\pi \to V_\eta$.

Korollar 3.2.14. *Seien (π, V_π) und (η, V_η) zwei irreduzible unitäre Darstellungen. Ein G-Homomorphismus $T : V_\pi \to V_\eta$ ist entweder Null oder invertierbar. Im zweiten Fall existiert eine Skalar $c > 0$, so dass cT unitär ist. Der Raum $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\eta)$ ist Null, ausser wenn π und η unitär äquivalent sind, in welchem Fall der Raum eindimensional ist.*

Proof. Sei $T : V_\pi \to V_\eta$ ein G-Homomorphismus. Sei adjungierter $T^* : V_\eta \to V_\pi$ ist ebenfalls ein G-Homomorphismus, denn für $v \in V_\pi$, $w \in V_\eta$ und $g \in G$ gilt

$$\begin{aligned}\langle v, T^*\eta(g)w\rangle &= \langle Tv, \eta(g)w\rangle = \left\langle \eta(g^{-1})Tv, w\right\rangle \\ &= \left\langle T\pi(g^{-1})v, w\right\rangle = \left\langle \pi(g^{-1})v, T^*w\right\rangle \\ &= \langle v, \pi(g)T^*w\rangle .\end{aligned}$$

Damit ist dann auch T^*T ein G-Homomorphismus auf V_π und daher gibt es nach dem Schurschen Lemma ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $T^*T = \lambda\mathrm{Id}$. Ist T nicht Null, dann ist T^*T positiv semidefinit und ungleich Null, also $\lambda > 0$. Sei $c = \sqrt{\lambda^{-1}}$, dann gilt $(cT)^*(cT) = \mathrm{Id}$. Ähnlich sieht man, dass TT^* bijektiv ist, daher ist cT bijektiv, also unitär.

Zum Schluss seien $S, T \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\eta)$ beide $\neq 0$. Dann existieren $c, d > 0$ so dass cS und dT unitaer sind. Dann ist auch $cdST^* = cS(dT)^* \in \mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\pi)$ unitaer, also ungleich Null. Damit ist $ST^* \neq 0$ und nach dem Lemma von Schur gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ mit $ST^* = \lambda\mathrm{Id}$, also

$$S = S(dT)^*(dT) = d^2(ST^*)T = d^2\lambda T.$$

Damit ist $\mathrm{Hom}_G(V_\pi, V_\eta)$ eindimensional. □

Definition 3.2.15. Für eine lokalkompakte Gruppe G sei $\widehat{G}$ die Menge aller Isomorphieklassen aller irreduziblen unitären Darstellungen von G. Wir nennen $\widehat{G}$ das **unitäre Dual** von G.

Definition 3.2.16. Sei (π, V_π) eine Darstellung von G. Ein Vektor v_0 heisst **zyklischer Vektor**, falls Spann$(\pi(g)v_0$ dicht liegt in V_π.

Ein Vektor v_0 ist genau dann zyklisch, wenn er die Darstellung erzeugt.

Ist π irreduzibel, dann ist jeder Vektor $v_0 \neq 0$ zyklisch.

Beispiele 3.2.17.
- Ein Beispiel einer Darstellung, die nicht irreduzibel ist, aber dennoch einen zyklischen Vektor hat: Sei $B = \left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und sei $\eta : B \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ die Inklusionsabbildung. Dann ist η eine Darstellung auf dem Raum $V_\eta = \mathbb{C}^2$. Diese Darstellung ist nicht irreduzibel, weil der Raum $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein abgeschlossener, B-stabiler Unterraum ist. Der Vektor $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein zyklischer Vektor. (Beweis zur Übung)

- Sei $U(n)$ die Gruppe aller unitären $n \times n$ Matrizen, also aller $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ mit $A^*A = I$. Dann ist die Inklusionsabbildung $\gamma : U(n) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ eine Darstellung. Wir zeigen, dass sie irreduzibel ist. Sei dazu $0 \neq U \subset \mathbb{C}^n$ ein $U(n)$-stabiler Unterraum. **Angenommen**, $U \neq \mathbb{C}^n$, dann gibt es ein $1 \le k < n$ und eine Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{C}^n$ so dass $e_1, \dots, e_k$ den Raum U aufspannen. Sei τ die Transposition von $\{1, \dots, n\}$, die 1 und n vertauscht. Definiere eine lineare Abbildung A durch

$$Ae_j = e_{\tau(j)}$$

  Dann wirft A eine ONB auf eine ONB, ist also unitär, also in $U(n)$, lässt aber U nicht stabil. **Widerspruch!**

Proposition 3.2.18. *Sei K eine kompakte Gruppe und sei (τ, V_τ) eine endlich-dimensionale Darstellung von K.*

(a) *Auf V_τ gibt es ein Skalarprodukt, das die Darstellung unitär macht.*

(b) *τ ist eine direkte Summe von irreduziblen Unterdarstellungen.*

Beweis. (a) Sei $(.,.)$ irgendein Skalarprodukt auf V_τ, dann ist

$$\langle v, w\rangle := \int_K (\tau(k)v, \tau(k)w)\, dk$$

ein Skalarprodukt unter dem τ unitär ist.

(b) Ist $U \subset V_\tau$ stabil unter K, dann ist $U^\perp$ ein K-stabiles Komplement. □

3.3 Faltung

Definition 3.3.1. Sei $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Für $f, g \in L^1(G)$ und $x \in G$ sei

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x)\, dy$$

das **Faltungsintegral**

Lemma 3.3.2. *Das Faltungsintegral konvergiert fast überall in x und definiert eine Funktion in $L^1(G)$. Es gilt $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$ und $L^1(G)$ wird mit der Faltung zu einer *-Algebra mit Involution $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Die Menge $C_c(G)$ ist eine *-Unteralgebra.*

Beweis. Es gilt

$$\int_G \int_G |f(y)g(y^{-1}x)|\, dx\, dy = \int_G \int_G |f(y)g(x)|\, dx\, dy = \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty.$$

Nach dem Satz von Fubini existiert das Faltungsintegral fast überall in x und die Behauptung folgt. □

Lemma 3.3.3. *Ist (π, V_π) eine Darstellung von G und $f \in C_c(G)$, dann ist*

$$v \mapsto \pi(f)v := \int_G f(x)\pi(x)v\, dx$$

ein stetiger linearer Operator auf V_π. Es ist $\pi(f*g) = \pi(f)\pi(g)$ und

$$\pi(y)\pi(f)v = \pi(L_y f)v, \quad \pi(f)\pi(y)v = \pi(R_{y^{-1}} f)v,$$

fuer $y \in G$, wobei $L_y f(x) = f(y^{-1}x)$ und $R_y f(x) = f(xy)$.

Ist V ein Hilbert-Raum und π unitaer, so gilt ausserdem $\left\|\pi(f)\right\|_{\mathrm{Op}} \leq \left\|f\right\|_1$, so dass π in diesem Fall zu einer Darstellung der Faltungsalgebra $L^1(G)$ ausdehnt. Ferner ist dann $\pi(f^*) = \pi(f)^*$, wobei $f^*(x) - \overline{f(x^{-1})}$.

Beweis. Man sieht leicht, dass die Abbildung $v \mapsto \pi(f)v$ linear ist. Sei $C = \sup_{x \in \mathrm{supp}(f)} \|\pi(x)\|_{\mathrm{Op}} < \infty$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \left\|\pi(f)v\right\| &= \left\|\int_G f(x)\pi(x)v\,dx\right\| \\ &\leq \int_G |f(x)|\,\|\pi(x)v\|\;dx \\ &\leq \left\|f\right\|_1 C\,\|v\|\,. \end{aligned}$$

Beachte, dass $C = 1$, falls π unitaer, in diesem Fall folgt also $\left\|\pi(f)v\right\| \leq \left\|f\right\|_1 \|v\|$. Die Eigenschaft $\pi(f*g) = \pi(f)\pi(g)$ rechnet man leicht nach. Weiter gilt

$$\begin{aligned} \langle \pi(y)\pi(f)v, w\rangle &= \int_G f(x)\,\langle \pi(yx)v, w\rangle\;dx \\ &= \int_G f(y^{-1}x)\,\langle \pi(x)v, w\rangle\;dx \\ &= \left\langle \pi(L_y f)v, w\right\rangle. \end{aligned}$$

Fuer die Rechtsdarstellung geht das ebenso.

Sei nun V ein Hilbert-Raum und π untaer. Wir haben schon gesehen, dass dann $\left\|\pi(f)\right\|_{\mathrm{Op}} \leq \left\|f\right\|_1$ gilt. Zuletzt rechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle \pi(f)^* v, w \rangle &= \int_G f^*(x) \langle \pi(x) v, w \rangle \, dx \\
&= \int_G \overline{f(x^{-1})} \langle \pi(x) v, w \rangle \, dx \\
&= \int_G \overline{f(x)} \left\langle \pi(x^{-1}) v, w \right\rangle \, dx \\
&= \int_G \overline{f(x)} \langle v, \pi(x) w \rangle \, dx \\
&= \int_G \langle v, f(x) \pi(x) w \rangle \, dx \\
&= \langle v, \pi(f) w \rangle \,.
\end{aligned}$$

□

Definition 3.3.4. Eine **Dirac-Folge** ist eine Folge $f_n \in C_c^\infty(G)$ so dass

- Zu jeder Einsumgebung $U \subset G$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \geq n_0$ gilt
$$\operatorname{supp}(f_n) \subset U.$$
- $f_n \geq 0$ und $\int_G f_n(x) \, dx = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.3.5. *Sei (f_n) eine Dirac-Folge und sei (π, V_π) eine Darstellung von G. Dann gilt für jedes $v \in V_\pi$, dass*

$$\left\|\pi(f_n) v - v\right\| \to 0$$

wenn $n \to \infty$.

Beweis. Sei $v \in V$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Darstellung eine Einsumgebung $U \subset G$ so dass für jedes $x \in U$ gilt

$$\|\pi(x) v - v\| < \varepsilon.$$

Sei dann $n_0 \in \mathbb{N}$ so gross, dass für jedes $n \geq n_0$ gilt $\operatorname{supp}(f_n) \subset U$. Dann folgt für $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}\left\|\pi(f)v - v\right\| &= \left\|\int_G f(x)(\pi(x)v - v)\,dx\right\| \\ &\leq \int_G |f(x)|\,\|\pi(x)v - v\|\,dx \\ &= \int_U |f(x)|\,\|\pi(x)v - v\|\,dx < \varepsilon \int_U |f(x)|\,dx = \varepsilon.\end{aligned}$$ □

3.4 Glatte Vektoren

Betrachte die Gruppe $K = \mathrm{SO}(2)$. Für $k = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in K$ und $m \in \mathbb{Z}$ sei

$$\chi_m(k) = (a + ib)^m.$$

Die Menge aller χ_m, $m \in \mathbb{Z}$ ist genau die Menge aller stetigen Charaktere von K.

Proposition 3.4.1. *Sei* $K = \mathrm{SO}(2) \subset G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. *Sei* (π, V_π) *eine Darstellung von* G. *Dann ist der Unterraum*

$$V_{\pi,K} := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_\pi(m)$$

dicht in V_π, *wobei*

$$V_\pi(m) = \left\{v \in V_\pi : \pi(k)v = \chi_m(k)v\right\}.$$

Die Unterraeume $V_\pi(m)$ *mit* $m \in \mathbb{Z}$ *heissen die* K-**Typen** *der Darstellung* π.

Beweis. Für jede kompakte Gruppe gilt, dass eine beliebige Darstellung in dieser Weise zerlegt werden kann (Deitmar/Echterhoff). □

Definition 3.4.2. Der Raum $V_{\pi,K}$ aus der Proposition wird der Raum der K**-endlichen Vektoren** genannt. Ein Vektor $v \in V_\pi$ liegt genau dann in $V_{\pi,K}$, wenn der Raum

$$\mathrm{Spann}\{\pi(k)v : k \in K\}$$

endlich-dimensional ist.

Definition 3.4.3. Sei (π, V_π) eine Darstellung von G. Ein Vektor $v \in V_\pi$ heisst **glatter Vektor**, falls die Abbildung

$$\begin{aligned} G &\to V_\pi, \\ x &\mapsto \pi(x)v \end{aligned}$$

unendlich oft differenzierbar ist.

Satz 3.4.4. *Sei (π, V_π) eine Darstellung von G. Dann sind ist der Unterraum V_π^∞ der glatten Vektoren dicht in V_π. Ausserdem ist der Raum*

$$V_{\pi,K}^\infty = V_\pi^\infty \cap V_{\pi,K}$$

der K-endlichen, glatten Vektoren dicht in V_π.

Beweis. Sei $X \in \mathfrak{g}$ und sei $f \in C_c^\infty(G)$, sei $v \in V_\pi$ und $w = \pi(f)v$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi(\exp(tX))w &= \pi(\exp(tX))\pi(f)v \\ &= \int_G f(x)\pi(\exp(tX)x)v\,dx \\ &= \int_G f(\exp(-tX)x)\pi(x)v\,dx. \end{aligned}$$

Da $Xf(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(tX)x)$ existiert und in $C_c^\infty(G)$ liegt, ist

$t \mapsto \pi(\exp(tX))w$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(\exp(tX))w = -\int_G Xf(x)\pi(x)v = -\pi(Xf)v.$$

Dies kann nun beliebig oft wiederholt werden und daher ist $\pi(f)v$ ein glatter Vektor für jedes $f \in C_c^\infty(G)$. Da $C_c^\infty(G)$ eine Dirac-Folge enthält, ist $\pi(C_c^\infty(G))V_\pi \subset V_\pi^\infty$ dicht in V_π.

Nun zum Zusatz. Für $m \in \mathbb{Z}$ sei

$$V_\pi(m) = \Big\{ v \in V_\pi : \pi(k)v = \chi_m(k)v \ \forall_{k \in K} \Big\}.$$

Die Projektion auf $V_\pi(m)$ ist gegeben durch

$$P_m v = \int_K \chi_m(k^{-1})\pi(k)v\, dk.$$

Für $f \in C_c^\infty(G)$ ist daher

$$\begin{aligned} P_m \pi(f)v &= \int_K \int_G \chi_m(k^{-1}) f(x)\pi(kx)v\, dx\, dk \\ &= \int_K \int_G \chi_m(k^{-1}) f(k^{-1}x)\pi(x)v\, dx\, dk \\ &= \int_G \underbrace{\left(\int_K \chi_m(k^{-1}) f(k^{-1}x)\, dk \right)}_{=f^{(m)}(x)} \pi(x)v\, dx \\ &= \pi(f^{(m)})v. \end{aligned}$$

Mit f ist auch f_m wieder in $C_c^\infty(G)$. Ist nun (f_j) eine Dirac-Folge in $C_c^\infty(G)$, dann gilt für gegebenes $v \in V_\pi$, dass $v_n \to v$ und $v_n \in V_{\pi,K}^\infty$, wobei

$$v_n = \sum_{|m| \le n} \pi(f_n^{(m)})v. \qquad \square$$

3.5 Lie-Algebren

Definition 3.5.1. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine **Lie-Algebra** über $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum L mit einer bilinearen Abbildung

$$[.,.] : L \times L \to L,$$

so dass

- $[X, X] = 0$ für jedes $X \in L$ und
- $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ für alle $X, Y, Z \in L$.

Die zweite Eigenschaft nennt man auch die **Jacobi-Identität**. Die erste Eigenschaft hat als Konsequenz:

$$[Y, X] = -[X, Y].$$

Hauptbeispiel ist $gl_n(\mathbb{K})$, die Menge aller $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit der Kommutator-Klammer:

$$[A, B] = AB - BA.$$

Beachte, dass die Menge $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = s\ell_n(\mathbb{K})$ aller Matrizen A mit

$$\mathrm{tr}(A) = 0$$

eine Unteralgebra ist.

Definition 3.5.2. Eine **Darstellung** von $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ ist eine $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$-lineare Abbildung

$$\pi : \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \to \mathrm{End}(V)$$

für einen komplexen Vektorraum V, so dass

$$\pi([X,Y]) = [\pi(X), \pi(Y)]$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ gilt, wobei $[\pi(X), \pi(Y)] = \pi(X)\pi(Y) - \pi(Y)\pi(X)$ die Kommutator-klammer ist.

Jede Darstellung von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ liefert per Restriktion eine von $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ und umgekehrt kann wegen

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$$

jede Darstellung π von $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ zu einer Darstellung $\pi_{\mathbb{C}}$ von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ komplexifiziert werden, indem man

$$\pi_{\mathbb{C}}(X + iY) = \pi(X) + i\pi(Y)$$

setzt. Diese beiden Operationen sind invers zueinander, so dass Darstellungen von $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ oder $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ im Grunde dasselbe sind.

Lemma 3.5.3. *Die Vektoren*

$$W = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

sind eine Basis von $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Es gilt

$$[W, \tilde{E}] = 2i\tilde{E}, \quad [W, \tilde{F}] = -2i\tilde{F}, \quad [\tilde{E}, \tilde{F}] = -4iW.$$

Es gilt $\exp(\mathbb{R}W) = \mathrm{SO}(2)$. *Die Gruppe $K = \mathrm{SO}(2)$ operiert durch Konjugation auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. Unter dieser Operation zerfällt $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ in die K-Typen*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} &= \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(-2) \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(0) \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}(2) \\ &= \mathbb{C}\tilde{E} \oplus \mathbb{C}W \oplus \mathbb{C}\tilde{F}. \end{aligned}$$

Beweis. Nachrechnen. $\square$

Proposition 3.5.4. *Ist (π, V_π) eine Darstellung von $G = \mathrm{SL}(\mathbb{R})$. dann definiert*

$$\tilde{\pi}(X) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(\exp(tX))$$

eine Darstellung von $\mathfrak{g} = s\ell_2(\mathbb{R})$ auf dem Raum V_π^∞ bzw dem Raum $V_{\pi,K}^\infty$.

Ist π endlich-dimensional, dann gilt

$$\pi(\exp(X)) = \exp(\tilde{\pi}(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\pi}(X)^n}{n!}.$$

Beweis. Für $X, Y \in \mathfrak{g}$ und $s, t \in \mathbb{R}$ schreibe $x_s = \exp(sX)$ und rechne

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x_s Y x_s^{-1} &= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \exp(sX) Y \exp(-sX) \\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (1 + sX + s^2 R) Y (1 - s + s^2 R) \\
&= \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} Y + s(XY - YX) + s^2 R \\
&= XY - YX = [X, Y]
\end{aligned}$$

wobei R jeweils für einen Rest steht, der für $s \to 0$ beschränkt bleibt. Ist $v \in V_\pi^\infty$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{g} \to V_\pi \\
&Y \mapsto \pi(Y)v = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \pi(\exp(tY))v
\end{aligned}$$

linear und damit stetig (da $\mathfrak{g}$ endlich-dimensional). Es folgt

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} \pi(x_s Y x_s^{-1})v = \left(\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} x_s Y x_s^{-1}\right)v = \pi([X, Y])v.$$

Schliesslich rechnen wir

$$\begin{aligned}
[\pi(X),\pi(Y)]v &= \pi(X)\pi(Y)v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\pi(\exp(sX)\exp(tY))v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\pi(x_s\exp(tY))v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\pi(\exp(tx_sYx_s^{-1})x_s)v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\pi(x_sYx_s^{-1})\pi(x_s)v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\pi(x_sYx_s^{-1})v + \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\pi(Y)\pi(x_s)v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \pi([X,Y])v + \pi(Y)\pi(X)v - \pi(Y)\pi(X)v \\
&= \pi([X,Y])v.
\end{aligned}$$

Jetzt ist alles gezeigt bis auf die Tatsache, dass $\pi(X)V_{\pi,K}^\infty \subset V_{\pi,K}^\infty$ für jedes $X \in \mathfrak{g}$ gilt. Hierzu beachte, dass die Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\mathbb{C} \otimes V_{\pi,K}^\infty &\to V_\pi^\infty \\
(X,v) &\mapsto \pi(X)v
\end{aligned}$$

linear ist und $K = \mathrm{SO}(2)$ äquivariant, wobei K auf $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = s\ell_2(\mathbb{C})$ durch Konjugation operiert. Ist $v \in V_\pi^\infty(l)$, also $\pi(k)v = \chi_l(k)v$ für $k \in K$, dann folgt aus dem letzten Lemma

$$\pi(\mathfrak{g})v \subset V_\pi^\infty(l-2) \oplus V_\pi^\infty(l) \oplus V_\pi^\infty(l+2).$$

Damit ist $\pi(X)v$ wieder K-endlich wenn v dies ist.

Ist π endlich-dimensional, dann konvergiert die Reihe

$\exp(\tilde{\pi}(X)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\pi}(X)^n}{n!}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\pi(\exp(tX)) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\pi(\exp((t+h)X)) - \pi(\exp(tX))\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\pi(\exp(hX)) - \mathrm{Id}\right)\exp(tX)\\ &= \tilde{\pi}(X)\pi(\exp(tX)).\end{aligned}$$

Da auch $\exp(t\tilde{\pi}(X))$ dieselbe Differentialgleichung erfüllt, bei gleichem Anfangswert in $t = 0$, folgt die Gleichheit. □

Definition 3.5.5. Ist f eine glatte Funktion auf G und ist $y \in G$, dann schreiben wir $R(y)f(x) = f(xy)$. Dies definiert eine lineare Operation von G auf $C^\infty(G)$. Für $X \in \mathfrak{g}$ definieren wir

$$Xf(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(x\exp(tX)).$$

3.6 Die Universell Einhüllende

Ist A eine assoziative Algebra über $\mathbb{K}$, dann wird A zu einer Lie-Algebra durch die Kommutator-klammer:

$$[a, b] = ab - ba.$$

Wir zeigen nun, dass sich jede Lie-Algebra als Unteralgebra einer solchen Lie-Algebra darstellen lässt.

Satz 3.6.1. *Sei L eine Lie-Algebra über $\mathbb{K}$. Dann gibt es eine assoziative Algebra $U(L)$ über $\mathbb{K}$ und einen Lie-Homomorphismus $\eta : L \to U(L)$ mit der folgenden universellen Eigenschaft: Ist A irgendeine assoziative Algebra und ist $\phi : L \to A$ ein Lie-Homomorphismus, also*

$\phi([X, Y]) = \phi(X)\phi(Y) - \phi(Y)\phi(X)$, dann gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $\alpha : U(L) \to A$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\phi"'] & U(L) \arrow[d, dotted, "\alpha"] \\ & A \end{tikzcd}$$

kommutiert. Die Algebra und der Morphismus η sind bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Proof. Sei

$$\begin{aligned} T(L) &= \mathbb{K} \oplus L \oplus (L \otimes L) \oplus (L \otimes L \otimes L) \oplus \dots \\ &= K \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus L^{\otimes 3} \oplus \dots \end{aligned}$$

die **tensorielle Algebra** über L. Sei I das zweiseitige Ideal erzeigt von allen Elementen der Form

$$[X, Y] - X \otimes Y + Y \otimes X$$

wobei $X, Y \in L$ liegen. Dann hat $U(L) := T(L)/I$ die verlangte universelle Eigenschaft. Die Eindeutigkeit folgt wie immer bei universellen Eigenschaften. □

Satz 3.6.2. *Ist (π, V_π) eine Darstellung von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, so setzt die Operation der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ auf den glatten Vektoren V_π^∞ zu einem eindeutig bestimmten Homomorphismus assoziativer Algebren*

$$\pi : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V_\pi^\infty)$$

fort. Diese $\mathfrak{g}$-Operation und die G-operation sind verträglich in dem Sinne, dass für jedes $g \in G$ und jedes $Z \in U(\mathfrak{g})$ gilt

$$\pi(g)\pi(Z)\pi(g^{-1}) = \pi(gZg^{-1}).$$

Hierbei wir für $Z = Z_1 \cdots Z_r$ mit $Z_j \in \mathfrak{g}$ geschrieben

$$gZg^{-1} = (gZ_1g^{-1}) \cdots (gZ_rg^{-1}).$$

Beweis. Der erste Teil folgt sofort aus der universellen Eigenschaft. Die zweite Aussage braucht nur für $X \in \mathfrak{g}$ nachgewiesen zu werden. Dann aber ist

$$\begin{aligned} \pi(gXg^{-1}) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp(tgXg^{-1})) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(g\exp(tX)g^{-1}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(g)\pi(\exp(tX))\pi(g^{-1}) \\ &= \pi(g)\left(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \pi(\exp(tX))\right)\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(X)\pi(g^{-1}) \end{aligned}$$ □

Satz 3.6.3 (Poincaré-Birhoff-Witt)**.** *Ist L eine Lie-Algebra und ist $X_1, \ldots, X_n$ eine Basis von L. Dann ist die Familie aller*

$$X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$$

mit $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}_0$ eine Basis von $U(L)$.

Beweis. Beachte zuerst, dass die universell Einhüllende $U(L)$ eine

Filtrierung trägt:

$$\mathbb{K} = U_0(L) \subset U_1(L) \subset \dots$$

wobei $U_s(L)$ das Bild in $U(L)$ von

$$T_s(L) = \mathbb{K} \oplus L \oplus L^{\otimes 2} \oplus \dots \oplus L^{\otimes s}$$

ist. Ist $W \in U(L)$, dann sei der **Grad** von W definiert als

$$\mathrm{grad}(W) = \min_{k \geq 0} W \in U_k(L).$$

Wir benutzen die universelle Eigenschaft. Sei $\mathcal{A}$ der formale Vektorraum mit Basis $(X(k) = X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n})_{k \in \mathbb{N}_0^n}$. Auf $\mathcal{A}$ definiere ein Produkt durch bilineare Fortsetzung von

$$(X(k), X(l)) \mapsto X(k)X(l)$$

modulo der Reduktionen, die man erhält, wenn man die Vektoren in die richtige Reihenfolge bringt. Zum Beispiel:

$$X_1X_2X_1 = X_1[X_2, X_1] + X_1^2X_2,$$

dann schreibt man $[X_1, X_2]$ als Linearkombination der X_j und reduziert erneut. Da der Grad des reduzierten Terms kleiner ist als der des Ausgangsterms, stoppt dieser Algorithmus. Man überzeugt sich induktiv, dass $\mathcal{A}$ damit zu einer assoziativen Algebra wird und dass die natürliche Einbettung $\phi : L \to \mathcal{A}$ ein Lie-Homomorphismus ist. Nach der universellen Eigenschaft existiert ein Algebrenhomomorphismus $\alpha : U(L) \to \mathcal{A}$ der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\phi"'] & U(L) \arrow[d, "\alpha"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

kommutativ macht. Da das Bild von α das Bild von ϕ enthält, welches $\mathcal{A}$ als Algebra erzeugt, ist α surjektiv. Da die Monome $X(k)$ ein Erzeugendensystem von $U(L)$ bilden, ist α auch injektiv. □

Definition 3.6.4. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Auf $\mathfrak{g}_{\mathbb{K}} = s\ell_2(\mathbb{K})$ betrachte die Bilinearform

$$\begin{aligned} b : \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} \times \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} &\to \mathbb{K} \\ (X, Y) &\mapsto \mathrm{tr}(XY). \end{aligned}$$

Lemma 3.6.5. *Die Bilinearform b ist nicht entartet, symmetrisch und* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$*-invariant, d.h. es gilt*

$$b(gXg^{-1}, gYg^{-1}) = b(X, Y)$$

für alle $X, Y \in s\ell_2(\mathbb{K})$ *und jedes* $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$. *Ferner gilt für* $X, Y, Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$, *dass*

$$b([X, Y], Z) = b(X, [Y, Z]).$$

Beweis. Symmetrie ist klar. Sei $X = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}$ mit $b(X, Y) = 0$ für alle Y. Wir zeigen, dass $X = 0$ ist. Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= b\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 2a, \\ 0 &= b\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = c, \\ 0 &= b\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right) = b, \end{aligned}$$

also folgt die Behauptung. Die Invarianz folgt aus der Tatsache, dass $\mathrm{tr}(gAg^{1}) = \mathrm{tr}(A)$ gilt. Ferner gilt $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ und damit

$$\begin{aligned} b([X,Y],Z) &= \mathrm{tr}(XYZ) - \mathrm{tr}(YXZ) \\ &= \mathrm{tr}(XYZ) - \mathrm{tr}(XZY) = b(X,[Y,Z]). \end{aligned}$$ □

Lemma 3.6.6. *Sei X_1, X_2, X_3 eine Basis von $\mathfrak{g}$ und sei X_1', X_2', X_3' die* ***b*-duale Basis***, d.h., die X_j' sind die eindeutig bestimmten Vektoren mit*

$$b(X_i, X_j') = \delta_{i,j}.$$

Dann ist das Element

$$\Omega := X_1X_1' + X_2X_2' + X_3X_3' \in U(\mathfrak{g})$$

unabhängig von der Basis X_1, X_2, X_3. Man nennt Ω das **Casimir-Element***. Es gilt $g\Omega g^{-1} = \Omega$ für alle $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ und $\Omega Z = Z\Omega$ für alle $Z \in U(\mathfrak{g})$.*

Beweis. Wir geben eine andere Konstruktion von Ω an, die ohne Basiswahl auskommt. Die reguläre Bilinearform b induziert einen linearen Isomorphismus zum Dualraum

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_{\mathbb{K}} &\xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}_{\mathbb{K}}^* \\ X &\mapsto \hat{X}, \end{aligned}$$

wobei $\hat{X}(Y) = b(X,Y)$. Die Bilinearform b liefert andererseits ein Element

$$b \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}.$$

Dann ist Ω das Bild von b unter $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$. Die Eigenschaft $g\Omega g^{-1} = \Omega$ folgt aus der Invarianz der Bilinearform b. Durch Ableiten ergibt sich daraus $Z\Omega = \Omega Z$ für alle $Z \in \mathfrak{g}$ und da diese die universell Einhüllende erzeugen, liegt Ω im Zentrum. □

Bemerkung 3.6.7. Wir betrachten eine spezielle Basis von $s\ell_2(\mathbb{R})$. Seien

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H.$$

Man rechnet

$$b(H, H) = 2, \quad b(H, E) = b(H, F) = 0,$$
$$b(E, E) = b(F, F) = 0, \quad b(E, F) = 1.$$

Damit ist die zu H, E, F duale Basis gegeben durch $\frac{1}{2}H, F, E$ und daher ist

$$\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE.$$

3.7 Zulässigkeit

Definition 3.7.1. Eine Darstellung (π, V_π) von G heisst **zulässig**, wenn die K-Typen endlich-dimensional sind, wenn also

$$\dim V_\pi(l) < \infty$$

für jedes $l \in \mathbb{Z}$ gilt.

Definition 3.7.2. Sei (π, V_π) eine Darstellung. Ein Vektor $v \in V_\pi$ heisst **analytisch**, falls die Abbildung $G \to V_\pi$, $x \mapsto \pi(x)v$ reell-analytisch, also lokal in konvergente Potenzreihen entwickelbar, ist. Sei V_π^ω der Vektorraum der analytischen Vektoren. Es gilt

$$V_\pi^\omega \subset V_\pi^\infty.$$

Lemma 3.7.3. *Ist (π, V_π) unitaer, dann liegt V_π^ω dicht in V_π.*

Beweis. Indem man die Iwasawa-Koordinaten verwendet und Funktionen der Form

$$f(x,t,\theta) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-s(x^2+t^2+(\theta+m)^2)}$$

mit $s > 0$ verwendet, sieht man, dass es eine Folge analytischer Funktionen (f_j) auf G gibt, so dass $\pi(f_j)v \to v$ fuer jedes $v \in V_\pi$. Der Vektor $\pi(f_j)v$ ist analytisch. □

Lemma 3.7.4. *Ist (π, V_π) zulaessig, dann ist jeder K-endliche Vektor glatt, es gilt also*

$$V_{\pi,K} \subset V_\pi^\infty.$$

Ist π ausserdem unitaer, dann ist jeder K-endliche Vektor analytisch, dann gilt also sogar

$$V_{\pi,K} \subset V_\pi^\omega.$$

Proof. Da V_π^∞ dicht in V_π, ist nach Projektion auf den K-Typ $V_\pi(m)$ auch $V_\pi^\infty(m)$ dicht in $V_\pi(m)$. Da $V_\pi(m)$ endlich-dimensional ist, folgt $V_\pi^\infty(m) = V_\pi(m)$.

Die zweite Aussage folgt ebenso. □

Satz 3.7.5. *Jede irreduzible unitäre Darstellung ist zulässig. Genauer haben wir sogar*

$$\dim V_\pi(l) \le 1$$

für jedes $l \in \mathbb{Z}$, wenn (π, V_π) eine irreduzible unitäre Darstellung ist.

Beweis.

Lemma 3.7.6. *Sei (η, V_η) eine endlich-dimensionale Darstellung von G.*

(a) *Es gibt einen gemeinsamen Eigenvektor von AN, d.h., es gibt ein $v_0 \in V_\eta$, do dass zu jedem $an \in AN$ ein $\lambda(an) \in \mathbb{C}$ existiert mit $\eta(an)v = \lambda(an)v$.*

(b) *Ist η irreduzibel, dann folgt für die K-isotypische Zerlegung: $\eta|_K = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} V_\eta(l)$, dass jedes $l \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\dim V_\eta(l) \leq 1.$$

Beweis. (a) Die Gruppe N is abelsch, also gibt es einen gemeinsamen Eigenvektor. Ist v ein solcher, dann gilt $\eta(n)v = \lambda(n)v$ für jedes $n \in N$ mit $\lambda(n) \in \mathbb{C}$. Sei dann $a \in A$ und sei $w = \eta(a)v$, dann gilt

$$\eta(n)w = \eta(a)\eta(\underbrace{a^{-1}na}_{\in N})v = \lambda(a^{-1}na)\eta(a)v = \lambda(a^{-1}na)w.$$

Das bedeutet, dass a den Eigenraum $\mathrm{Eig}(\lambda)$ in den Eigenraum $\mathrm{Eig}({}^a\lambda)$ abbildet, wobei ${}^a\lambda(n) = \lambda(a^{-1}na)$ ist. Die Abbildung $A \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(N, \mathbb{C}^\times) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^\times) = \{x \mapsto e^{\alpha x} : \alpha \in \mathbb{C}\}$, gegeben durch $a \mapsto {}^a\lambda$ ist stetig. Da V_η endlich-dimensional ist, gibt es nur endlich viele Homomorphismen $\lambda : N \to \mathbb{C}^\times$, die auftreten, daher muss die Abbildung $a \mapsto {}^a\lambda$ konstant sein. Damit lässt die abelsche Gruppe A den Eigenraum $\mathrm{Eig}(\lambda)$ fest, hat dort also einen gemeinsamen Eigenvektor.

(b) Sei η irreduzibel und sei v_0 ein AN-Eigenvektor. Da $G = KAN$ und η irreduzibel, ist v_0 ein K-zyklischer Vektor. Sei $v_0 = \sum_{l\in\mathbb{Z}} v_0(l)$ die isotypische Zerlegung von v_0, also $v_0(l) \in V_\pi(l)$. Da die $V_\pi(l)$ stabil unter K sind, ist $v_0(l)$ ein K-zyklischer Vektor in $V_\pi(l)$. Da K auf $V_\pi(l)$ durch Skalare operiert, folgt $\dim V_\pi(l) \leq 1$. □

Lemma 3.7.7. *Sei $0 \neq f \in C_c(G)$. Dann gibt es eine endlich-dimensionale Darstellung η von G so dass $\eta(f) \neq 0$.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ der Vektorraum aller Funktionen auf G, der von den Matrixkoeffizienten aller endlich-dimensionalen Darstellungen erzeugt wird. Da Tensorprodukte von Darstellungen wieder Darstellungen sind, ist $\mathcal{A}$ eine Algebra. Da man Darstellungen komplex konjugieren kann, ist $\mathcal{A}$ unter komplexer Konjugation abgeschlossen. Da die Koeffizienten der natürlichen Darstellung δ_1 auftreten, welche injektiv ist, trennt $\mathcal{A}$ Punkte und enthält für jedes $x \in G$ eine Funktion f mit $f(x) \neq 0$. Sei $S \subset G$ eine kompakte Teilmenge, dann liegt nach dem Satz von Stone-Weierstrass $\mathcal{A}|_S$ dicht in $C(S)$. Daher ist jedes $f \in C_c(G)$ mit $\mathrm{supp}(f) \subset S$ ein auf S gleichmässiger Limes von Funktionen in $\mathcal{A}$, es gibt also ein $g \in \mathcal{A}$ mit $\int_G f(x)g(x)\,dx \neq 0$. Also gibt es eine endlich-dimensionale Darstellung η mit $\eta(f) \neq 0$. □

Lemma 3.7.8. *Für $l \in \mathbb{Z}$ sei $\mathcal{C}_l$ der Raum aller $f \in C_c(G)$ mit $f(kx) = f(xk) = \chi_l(k)f(x)$ für alle $k \in K$. Dann ist $\mathcal{C}_l$ eine *-Algebra unter der Faltung und $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$. Diese Algebra ist kommutativ.*

Beweis. Für $f \in C_c(G)$ sei

$$\chi_l *_K f(x) = \int_K \chi_l(k) f(k^{-1}x)\,dk,$$

sowie

$$f *_K \chi_l(x) = \int_K f(xk)\chi_l(k^{-1})\,dk.$$

Dann folgt $\mathcal{C}_l = \chi_l * C_c(G) * \chi_l$. Für eine Darstellung π von G ist

$$P_l = \pi(\overline{\chi_l}) = \int_K \chi_l(k^{-1})\pi(k)\,dk$$

gerade die Projektion auf den K-Typ $V_\pi(l)$. Es gilt

$$\pi(\overline{\chi_l})\pi(f)\pi(\overline{\chi_l}) = \pi(\chi_l * f * \chi_l).$$

Ist π endlich-dimensional und irreduzibel, dann ist $V_\pi(l)$ eindimensional und daher ist für $f, g \in C_l$ schon $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g) = \pi(g)\pi(f)$ da beide über die Projektion auf den höchstens eindimensionalen Raum $V_\pi(l)$ faktorisieren. Sie $F = f * g - g * f$, dann folgt $\pi(F) = 0$ für jede endlich-dimensionale Darstellung. Nach Lemma 3.7.7 ist $F = 0$, also C_l kommutativ. □

Wir beweisen nun den Satz. Sei (π, V_π) eine irreduzible unitäre Darstellung von G und sei $l \in \mathbb{Z}$ mit $V_\pi(l) \neq 0$. Dann operiert C_l auf dem Raum $V_\pi(l)$. Wir behaupten, dass diese Darstellung von C_l irreduzibel ist. Sei dazu $U \subset V_\pi(l)$ ein C_l-stabiler Unterraum und sei $\pi(C_c(G))U$ der von U-erzeugte $C_c(G)$-Modul. Dann ist $\pi(C_c(G))U$ dicht in V_π und daher ist $P_l(\pi(C_c(G))U)$ dicht in $V_\pi(l)$. Es ist aber

$$\begin{aligned} P_l(\pi(C_c(G))U) &= P_l\pi(C_c(G))P_lU \\ &= \pi(\chi_l)\pi(C_c(G))\pi(\chi_l)U \\ &= \pi(\chi_l * C_c(G) * \chi_l)U \\ &= \pi(C_l)U = U. \end{aligned}$$

Daher ist U dicht in $V_\pi(l)$, da U aber abgeschlossen war, ist $U = V_\pi(l)$. Nun ist C_l kommutativ. Daher vertauscht jedes $\pi(f)$ mit $f \in C_l$ mit allen anderen $\pi(g)$, $g \in C_l$. Nach dem Lemma von Schur ist $\pi(f)$ ein Skalar auf $V_\pi(l)$. Da das für jedes f gilt, operiert die ganze Algebra C_l durch Skalare. Da $V_\pi(l)$ aber irreduzibel ist, folgt

$$\dim V_\pi(l) = 1.$$ □

Definition 3.7.9. Ein $U(\mathfrak{g})$-Modul heisst **einfach**, wenn er keine echten Untermoduln hat.

Satz 3.7.10. *Sei (π, V_π) eine unitaere zulaessige Darstellung von G. Dann sind aequivalent:*

(a) *π ist irreduzibel,*

(b) *der $U(\mathfrak{g})$-Modul $V_{\pi,K}$ ist einfach.*

Bemerkung: Der Satz gilt auch fuer beliebige zulaessige Darstellungen. Man muss dann nur zeigen, dass es genuegend analytische Funktionen f gibt, die schnell genug fallen, dass das Integral $\pi(f)$ existiert. Fuer nicht zulaessige Darstellungen ist er falsch.

Beweis. (a)⇒(b): Sei π irreduzibel. Sei $0 \neq U \subset V_{\pi,K}$ ein $U(\mathfrak{g})$-Untermodul. Wir zeigen zunaechst, dass $U = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} U(m)$ gilt, wobei $U(m)$ die Menge aller $u \in U$ mit $\pi\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} v = im\,v$. Sei hierzu $0 \neq u \in U$. Dann ist $u = \sum_{j=1}^n u(m_j)$, wobei $m_j \in \mathbb{Z}$ verschiedene ganze Zahlen sind und $0 \neq u(m_j) \in V_\pi(m)$. Wir wollen zeigen, dass $u(m_1) \in U$ ist und benutzen Induktion nach n. Es ist $w = im_n\,u - \pi\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} u \in W$ und dieser Vektor erfuellt $w = \sum_{j=1}^{n-1} i\,\underbrace{(m_n - m_j)}_{\neq 0}\,u(m_j)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $u(m_1) \in U$. Es folgt $U = \bigoplus_m U(m)$. Sei $U'(m)$ das orthogonale Komplement von $U(m)$ in dem endlich-dimensionalen $V_\pi(m)$. Da π unitaer ist, ist fuer $u, v \in V_\pi^\infty$ und $X \in \mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned}
\langle \pi(X)u, v\rangle &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle \pi(\exp(tX)u, v\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle u, \pi(\exp(-tX)v\rangle \\
&= -\langle u, \pi(X)v\rangle .
\end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass das orthogonale Komplement

$$U' = \bigoplus_m U'(m)$$

von U in $V_{\pi,k}$ ebenfalls ein $\mathfrak{g}$ Untermodul ist. Sei $P : V_{\pi,K} \to U$ die Orthogonalprojektion. Diese vertauscht dann mit $\pi(\mathfrak{g})$, d.h., es gilt fuer jedes $X \in \mathfrak{g}$, dass $P\pi(X) = \pi(X)P$. Der Operator P dehnt aus zu einer Orthogonalprojektion auf V_π mit Bild $\overline{U}$. Seien $v \in V_{\pi,K}$ und $X \in \mathfrak{g}$. Die Abbildung $\gamma : \mathbb{R} \to V_\pi$,

$$\gamma(t) = P\pi(\exp(tX))v - \pi(\exp(tX))Pv$$

ist analytisch und erfuellt

$$\gamma^{(n)}(0) = 0$$

fuer jedes $n \geq 0$. Daher ist $\gamma \equiv 0$ und das bedeutet $P\pi(x)v = \pi(x)Pv$ gilt fuer jedes x in einer Einsumgebung von G und jedes $v \in V_{\pi,K}$. Aus Stetigkeitsgruenden gilt es dann fuer jedes $x \in V_\pi$ und da G von jeder Einsumgebung erzeugt wird, gilt es fuer jedes $x \in G$. Dann ist aber $\overline{U} = \mathrm{Im}(P)$ stabil unter $\pi(G)$ und da π irreduzibel ist, folgt $\overline{U} = V_\pi$. Daher $V_{\pi,K} = \overline{U}_K = U$.

(b)$\Rightarrow$(a): Sei $0 \neq V \subset V_\pi$ ein abgeschlossener, G-stabiler Unterraum. Dann ist V_K ein $\mathfrak{g}$-stabiler Unterraum von $V_{\pi,K}$ also $V_K = V_{\pi,K}$ und daher $V = \overline{V_K} = \overline{V_{\pi,K}} = V_{\pi,K}$. □

Satz 3.7.11. *Sei (π, V_π) eine irreduzible zulässige Darstellung von $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Dann gibt es ein Skalar $\omega = \omega_\pi \in \mathbb{C}$, so dass für jedes $v \in V_\pi^\infty$ gilt*

$$\pi(\Omega)v = \omega v.$$

Ferner gibt es $l_0, l_1 \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ *mit* $l_0 \le l_1$ *und* $l_0 \equiv l_1 \mod 2$ *falls beide in* $\mathbb{Z}$ *liegen so dass*

$$V_\pi(l) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_0 \le l \le l_1 \text{ und } l \equiv l_0 \mod 2.$$

Beweis. Sei (π, V_π) eine irreduzible zulässige Darstellung und sei $V_\pi = \bigoplus_{l\in\mathbb{Z}} V_\pi(l)$ die Zerlegung in K-Typen. Dann ist $V_\pi^\infty(l)$ dicht in $V_\pi(l)$ und da dieser Raum endlich-dimensional ist, ist jedes Vektor in $V_\pi(l)$ glatt. Sei $v \in V_\pi^\infty$. Dann ist v genau dann in $V_\pi(l)$, wenn $\pi(k)v = \chi_l(k)v$ für jedes $k \in K$ gilt. Dann folgt

$$\pi(k)\pi(\Omega)v = \pi(k\Omega k^{-1})\pi(k)v = \chi_l(k)\pi(\Omega)v.$$

Damit bildet $\pi(\Omega)$ den endlich-dimensionalen Raum $V_\pi(l)$ in sich ab. Daher hat Ω auf diesem Raum einen Eigenwert $\omega \in \mathbb{C}$. Es gibt also ein $0 \neq v \in V_\pi(l)$ so dass $\pi(\Omega)v = \omega v$. Sei nun W der Raum aller $w \in V_\pi^\infty$ mit $\pi(\Omega)w = \omega w$. Dann ist dieser Raum stabil unter $\pi(G)$ und da er $\neq 0$ ist, ist er dicht in V_π. Insbesondere ist $W \cap V_\pi(l)$ dicht in $V_\pi(l)$ also gleich $V_\pi(l)$. Dies gilt für jedes l und damit folgt $W \supset V_{\pi,K}^\infty$. Ist nun $u \in V_\pi^\infty$ und ist $P_l : V_\pi \to V_\pi(l)$ die Projektion auf den l-ten K-typ, dann vertauscht P_l mit Ω und fuer jedes $v \in V_\pi^\infty$ gilt

$$P_l(\Omega v - \omega v) = \Omega(P_l v) - \omega P_l v = 0$$

da dies fuer jedes l gilt, ist $\Omega v - \omega v = 0$, also liegt $v \in W$, so dass $W = V_\pi^\infty$ folgt.

Für die zweite Aussage seien

$$T = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Dann ist $T, P.Q$ eine Basis von $\mathfrak{g}_\mathbb{C} = s\ell_2(\mathbb{C})$ und T spannt die Unteralgebra $\mathfrak{k}_C = so(2)_\mathbb{C}$ auf. Man rechnet nach:

$$[T, P] = 2P, \quad [T, Q] = -2Q, \quad [P, Q] = T.$$

Da $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$ die Komplexifizierung von $\mathfrak{k} = so(2) = \mathrm{Lie}(SO(2))$ ist, operiert T auf $V_\pi(l)$ durch ein Skalar. Sei $W = iT \in so(2)$, so folgt $W^2 = -1$ und damit

$$\exp(tW) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

so dass $\chi_l(\exp(tW)) = (\cos t + i \sin t)^l = e^{ilt}$, so dass $\pi(W)v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{ilt} = il$ für $v \in V_\pi(l)$ folgt. Daher operiert T auf $V_\pi(l)$ durch den Skalar l und für $v \in V_\pi^\infty$ gilt

$$v \in V_\pi(l) \quad \Leftrightarrow \quad \pi(T)v = lv.$$

Beachte weiter, dass für die komplexifizierte Bilinearform $b(X, Y) = \mathrm{tr}(XY)$ auf $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} b(T, T) &= 2, & b(T, P) &= b(T, Q) = 0 \\ b(P, P) &= b(Q, Q) = 0, & b(P, Q) &= 1/2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\Omega = \frac{1}{2}T^2 + 2PQ + 2QP.$$

Sei $v \in V_\pi(l) = \mathrm{Eig}(T, l)$ und sei $w = \pi(P)v$, dann gilt

$$\begin{aligned} \pi(T)w &= \pi(TP)v \\ &= \pi([T, P])v + \pi(PT)v \\ &= 2\pi(P)v + l\pi(P)v \\ &= (l + 2)w. \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass

$$P(\mathrm{Eig}(T, l)) \subset \mathrm{Eig}(T, l + 2).$$

Analog erhält man

$$Q(\mathrm{Eig}(T, l)) \subset \mathrm{Eig}(T, l - 2).$$

Sei nun $0 \neq v_m \in V_\pi(m)$ für ein $m \in \mathbb{Z}$. Da nach Satz 3.7.5 jeder K-Typ höchstens eindimensional ist, sind $\pi(P^n Q^n)v$ und $\pi(Q^n P^n)v$ Vielfache von v_m für jedes $n \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $v_{m+2n} := \pi(P^n)v_m$ und sei $v_{m-2n} = \pi(Q^n)v_m$. Dann ist der Raum

$$U = \bigoplus_{l \equiv m \mod 2} \mathbb{C} v_l$$

stabil unter T, P, Q, also unter $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. □

3.8 Induzierte Darstellungen

Definition 3.8.1. Sei $M = \left\{ \pm \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\} \subset G$ und fixiere einen Charakter σ von M. Dann gilt $\sigma(-1) = (-1)^\varepsilon$ für ein $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Wir schreiben dann

$$\sigma(m) = m^\varepsilon$$

für $m \in M$. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und sei $V_{\varepsilon,\lambda}$ der Raum aller messbaren Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ mit

- $f(manx) = m^\varepsilon a^{\lambda+1} f(x)$ für alle $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$, wobei wir schreiben
$$a^z = \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix}^z = e^{tz}.$$
- $\int_K |f(k)|^2 \, dk < \infty$.

Wir identifizieren zwei Funktionen $f_1, f_2 \in V_{\varepsilon,\lambda}$, wenn sie ausserhalb einer Nullmenge übereinstimmen. Dann ist $V_{\varepsilon,\lambda}$ ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \int_K f(k)\overline{g(k)}\,dk.$$

Lemma 3.8.2. *Die Vorschrift*

$$\pi_{\varepsilon,\lambda}(y)f(x) = f(xy)$$

definiert eine Darstellung von G auf dem Hilbert-Raum $V_{\varepsilon,\lambda}$.

Diese Darstellung ist genau dann unitär, wenn $\lambda \in i\mathbb{R}$ ist.

Man nennt $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ die durch (ε, λ) **induzierte Darstellung**.

Definition 3.8.3. Man nennt die Darstellungen $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ die Darstellungen der (nichtunitären) **Hauptserie**. Ist $\lambda \in i\mathbb{R}$, so spricht man von der **unitären Hauptserie**.

Beweis des Lemmas. Zunächst müssen wir zeigen, dass $\pi_{\varepsilon,\lambda}(y)f$ wieder in $V_{\varepsilon,\lambda}$ liegt. Die Äquivarianzbedingung ist klar. Für die Integralbedingung schätzen wir ab

$$\begin{aligned}\int_K |f(ky)|^2\,dk &= \int_K \underline{a}(ky)^{\operatorname{Re}\lambda+1}|f(\underline{k}(ky)|^2\,dk\\ &\le C_{\lambda,y}\int_K \underline{a}(ky)^2|f(\underline{k}(ky)|^2\,dk\\ &= C_{\lambda,y}\int_K |f(k)|^2\,dk < \infty.\end{aligned}$$

Hierbei ist $C_{\lambda,y} = \sup_{k\in K}\underline{a}(ky)^{\operatorname{Re}\lambda-1}$ und im letzten Schritt wurde Satz 2.1.5 benutzt. Beachte, dass diese Abschätzung auch besagt, dass $\left\|\pi_{\varepsilon,\lambda}(y)\right\|_{\mathrm{Op}} \le \sqrt{C_{\lambda,y}}$. Nach Lemma 3.2.2 müssen wir dann nur noch zeigen, dass es einen dichten Teilraum $V_0 \subset V_{\varepsilon,\lambda}$ gibt, so dass für jedes $f_0 \in V_0$ die Abbildung $y \mapsto \pi_{\varepsilon,\lambda}(y)f_0$ in $y = 1$ stetig ist. Hierfür nehmen wir einfach den Teilraum der stetigen Funktionen in $V_{\varepsilon,\lambda}$. Ist f_0 stetig und $y_n \to 1$ eine in G konvergente Folge, dann konvergiert $f_0(ky_n)$ gleichmässig auf K gegen $f(k)$ und damit konvergiert diese Folge im L^2-Sinne.

Nun zur Unitarität. Sei $\lambda = it \in i\mathbb{R}$. Dann ist $|\underline{a}(ky)^{\lambda}| = 1$ für jedes y und damit ist die Darstellung unitär. Bei Betrachtung der oberen Abschätzung stellt man fest, dass die Darstellung genau dann unitär ist, wenn $|\underline{a}(ky)^{\lambda}| = 1$ für jedes y gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn λ imaginär ist. □

Lemma 3.8.4. *Das Casimir-Element Ω operiert auf $V_{\varepsilon,\lambda}$ durch den Skalar*

$$\pi_{\varepsilon,\lambda}(\Omega) = \frac{\lambda^2 - 1}{2}.$$

Beweis. Sei $f_l(ank) = a^{\lambda+1/2}\chi_l(k)$. Ist $l \equiv \varepsilon \mod 2$, dann ist $V_{\varepsilon,\lambda}(l) = \mathbb{C} f_l$ und daher ist $\pi(\Omega) f_l = \mu_l f_l$. Wir berechnen den Eigenwert μ_l. Wir schreiben $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE$ und rechnen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}H^2 f_l(1) &= \frac{1}{2}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l(\exp(tH)\exp(sH)) \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l(a_{2t+2s}) \\
&= \frac{1}{2}\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} e^{(t+s)(\lambda+1)} = \frac{1}{2}(\lambda+1)^2.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
EF f_l(1) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l(\exp(sE)\exp(tF)) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l\left(\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\right) = 0,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
FEf_l(1) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} f_l(\exp(tF)\exp(sE)) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} f_l\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} f_l\left(\begin{pmatrix}1 & s\\ t & 1+st\end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} (t^2+(1+st)^2)^{\frac{-\lambda-1}{2}} \left(\frac{1+st+it}{\sqrt{t^2+(1+st)^2}}\right)^l \\
&= -\lambda - 1.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz 3.8.5. (a) *Ist $\lambda = 0$ und $\varepsilon = 1$, dann zerfällt $V_{\varepsilon,\lambda}$ in eine Summe zweier Unterdarstellungen*

$$V_{1,0} = V_{1,0}^+ \oplus V_{1,0}^-,$$

den sogenannten **Steinberg-Darstellungen***, wobei*

$$V_{-1,0}^+ = \bigoplus_{k\geq 0} V_{-1,0}(2k+1) \quad \text{und} \quad V_{-1,0}^- = \bigoplus_{k\geq 0} V_{-1,0}(-2k-1).$$

(b) *Ist $\lambda = n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon \equiv n+1 \mod 2$, dann enthält $V_{\varepsilon,\lambda}$ die direkte Summe zweier irreduzibler unendlich-dimensionale Unterdarstellungen $\mathcal{D}_{n+1} = \mathcal{D}_{n+1}^+ \oplus \mathcal{D}_{n+1}^-$. Für die K-Typen gilt*

$$\mathcal{D}_{n+1}^\pm = \bigoplus_{k\geq 0} \mathcal{D}_{n+1}^\pm(\pm(n+1+2k)).$$

Wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{D}_{n+1} \to V_{(-1)^{n+1},n} \to \delta_{n-1} \to 0.$$

(c) *Ist* $\lambda = -n$ *mit* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\varepsilon \equiv n+1 \mod 2$*, dann enthält* $V_{\varepsilon,\lambda}$ *eine endlich-dimensionale Darstellung* $\cong \delta_{n-1}$*. Wir erhalten eine exakte Sequenz*

$$0 \to \delta_{n-1} \to V_{(-1)^{n+1},-n} \to \mathcal{D}_{n+1} \to 0.$$

In allen anderen Fällen ist $V_{\varepsilon,\lambda}$ *irreduzibel.*

Beweis. Es seien wieder

$$T = \begin{pmatrix} & i \\ -i & \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Omega = \frac{1}{2}T^2 + 2PQ + 2QP.$$

Wegen

$$P(\mathrm{Eig}(T,l)) \subset \mathrm{Eig}(T,l+2).$$

und

$$Q(\mathrm{Eig}(T,L)) \subset \mathrm{Eig}(T,l-2).$$

Es folgt, dass $P(f_l) = cf_{l+2}$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Wir berechnen c. Es gilt

$$P = -\frac{i}{2}H - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}F.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
Pf_l(1) &= -\frac{i}{2}Hf_l(1) - \frac{1}{2}Ef_l(1) - \frac{1}{2}Ff_l(1)\\
&= -\frac{i}{2}(\lambda+1) - \frac{1}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l(\exp(tF))\\
&= -\frac{i}{2}(\lambda+1) - \frac{1}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_l\left(\begin{pmatrix}1 & \\ t & 1\end{pmatrix}\right)\\
&= -\frac{i}{2}(\lambda+1) - \frac{1}{2}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (1+t^2)^{\frac{-\lambda-1-l}{2}}(1+it)^l\\
&= -\frac{i}{2}(l+\lambda+1).
\end{aligned}$$

Da $Q = P + iH$, folgt

$$Qf_l(1) = -\frac{i}{2}(l-\lambda-1).$$

Damit folgt

$$Pf_l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -l-1$$

und

$$Qf_l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = l-1.$$

Ist also $\lambda \notin \mathbb{Z}$, so kann dies nie passieren. Wir folgern nun die Irreduzibilität für $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Sei $0 \neq U \subset V_{\varepsilon,\lambda}$ eine Unterdarstellung. Dann gibt es ein $l_0 \in \mathbb{Z}$ mit $U(l_0) \neq 0$. Da $V_{\varepsilon,\lambda}(l)$ höchstens eindimensional ist, folgt $U(l_0) = V_{\varepsilon,\lambda}(l_0)$. Da $Pf_{l_0} = cf_{l_0+2}$ nicht Null ist, ist auch $U(l_0+2) \neq 0$ und so weiter und mit Q ebenso, so dass wir erhalten, dass U alle $V_{\varepsilon,\lambda}(l)$ enthält für $l \equiv l_0 \mod 2$. Dies sind aber alle K-Typen von $V_{\varepsilon,\lambda}$ und ihre Summe liegt dicht in $V_{\varepsilon,\lambda}$ also ist $U = V_{\varepsilon,\lambda}$.

Ist nun $\lambda \in \mathbb{Z}$, so gehen wir die Fälle durch. Ist $\lambda = 0$, so muss, damit $Pf_l = 0$ ist, $l = -1$ sein und dann muss $\varepsilon = 1$ sein, da sonst $V_{\varepsilon,\lambda}(l) = 0$ wäre. In diesem Fall ist aber auch $Qf_1 = 0$ und damit geben die angegebenen K-Typen Unterdarstellungen. Ist $\lambda = n \in \mathbb{N}$, so folgt

$Pf_{n-1} = 0$ und $Qf_{-n+1} = 0$ so dass sich die Behauptung ergibt. der Fall $\lambda = -n$ geht ebenso. □

4 Das unitäre Dual

4.1 Lie-Äquivalenz

Wir wissen schon, dass $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ genau dann unitär ist, wenn $\lambda \in i\mathbb{R}$ gilt.

Definition 4.1.1. Zwei Darstellungen π, η von G heissen **Lie-äquivalent**, falls die $\mathfrak{g}$-Moduln der K-endlichen Vektoren isomorph sind, wenn also

$$V_{\pi,K} \cong_{\mathfrak{g}} V_{\eta,K}.$$

Proposition 4.1.2. *Zwei irreduzible unitäre Darstellungen sind genau dann Lie-äquivalent, wenn sie isomorph sind.*

Beweis. Seien π und η Lie-äquivalent. Nach Satz 3.7.11 gibt es $l_0, l_1 \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ mit $l_0 \le l_1$ und $l_0 \equiv l_1 \mod 2$ falls beide in $\mathbb{Z}$ liegen so dass

$$V_\pi(l) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad l_0 \le l \le l_1 \text{ und } l \equiv l_0 \mod 2.$$

Für jeden K-Typ $V_\pi(l) \neq 0$ sei $v_l \in V_\pi(l)$ so gewaehlt, dass $\|v_l\| = 1$ und $Pv_l = \lambda_l v_{l+2}$ mit einem $\lambda_l \in \mathbb{R}$. Dann ist $V_\pi(l) = \mathbb{C}v_l$. Wir schreiben das Skalarprodukt von V_π als $\langle .,. \rangle$. Wir fixieren einen $\mathfrak{g}$-Isomorphismus $V_{\pi,K} \cong V_{\eta,K}$ und transportieren das Skalarprodukt von V_η nach $V_{\pi,K}$, welches wir dann als $\langle .,. \rangle_\eta$ schreiben. Die verschiedenen K-Typen stehen in beiden Skalarprodukten senkrecht aufeinander, also für $l \neq m$ haben wir

$$\langle v_l, v_m \rangle = 0 = \langle v_l, v_m \rangle_\eta .$$

Sei $c_l = \langle v_l, v_l \rangle_\eta > 0$. Es gilt $Pv_l = \lambda_l v_{l+2}$ für ein $\lambda_l \in \mathbb{C}$. Der entscheidende

Punkt ist, dass für $X \in \mathfrak{g}$ gilt $\pi(X)^* = \pi(-X)$ und ebenso $\eta(X)^* = \eta(-X)$. Sei also $X \mapsto X^*$ die antilineare Involution auf $U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$, die auf $\mathfrak{g}$ mit $X \mapsto -X$ übereinstimmt, dann ist $\pi(Z)^* = \pi(Z^*)$ für alle $Z \in U(\mathfrak{g}_\mathbb{C})$. Sei $l \in \mathbb{Z}$ so dass $v_l \neq 0 \neq v_{l+2}$. Es folgt

$$\lambda_l = \langle Pv_l, v_{l+1} \rangle = \langle v_l, P^* v_{l+2} \rangle,$$

und hieraus ergibt sich $P^* v_{l+2} = \lambda_l v_l$. Damit erhalten wir

$$\lambda_l c_{l+2} = \langle Pv_l, v_{l+2} \rangle_\eta = \langle v_l, P^* v_{l+2} \rangle_\eta = \lambda_l c_l,$$

also $c + l + 2 = c_l$ falls $Pv_l \neq 0$. Derselbe Schluss mit Q statt P liefert $c_{l-2} = c_l$ falls $v_{l-2} \neq 0 \neq v_l$. Damit folgt $\langle ., . \rangle_\eta = c \langle ., . \rangle$ für ein $c > 0$. Die Abbildung $v \mapsto c^{1/2} v$ is dann eine $\mathfrak{g}$-äquivariante Isometrie von $V_{\pi,K} \to V_{\eta,K}$, die sich zu einer unitären Isomorphie von Hilbert-Räumen $S : V_\pi \xrightarrow{\cong} V_\eta$ fortsetzt. Auf $V_{\pi,K}$ ist S äquivariant unter $\mathfrak{g}$. Wir behaupten, dass S schon G-äquivariant sein muss. Sei $v \in V_{\eta,K}$ und $X \in \mathfrak{g}$. Die Kurve

$$\gamma(t) = S\pi(\exp(tX))S^{-1}v$$

ist differenzierbar in V_η und hat die Ableitung

$$\gamma'(t) = S\pi(X)\pi(\exp(tX))S^{-1}v = \eta(X)\gamma(t)v$$

und den Anfangswert $\gamma(0) = v$, so dass aus der Eindeutigkeit der Lösung einer gewöhnlichen DGL folgt

$$\gamma(t) = \eta(tX)v.$$

Damit ist $S\pi(\exp(X)) = \eta(\exp(X))S$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und damit $S\pi(g) = \eta(g)S$ für alle $g \in G$, die in einer Umgebung der Eins liegen, diese erzeugt die Gruppe G, damit ist S ein G-Vertauschungsoperator. □

Lemma 4.1.3. *Zwei irreduzible zulässige Darstellungen sind genau dann Lie-äquivalent, wenn sie dieselben K-Typen und denselben Casimir-Eigenwert haben.*

Beweis. Sei π eine irreduzible zulässige Darstellung mit dem Casimir-Eigenwert ω. Sei $L = L(\pi)$ die Menge aller $l \in \mathbb{Z}$ mit $V_\pi(l) \neq 0$ und sei v_l ein Erzeuger von $V_\pi(l)$ falls $l \in L$. Da diese Erzeuger eindeutig sind bis auf Skalierung, können wir $Pv_l = v_{l+2}$ annehmen, falls $l, l+2 \in L$. Sei $c(l) \in \mathbb{C}$ definiert durch $Qv_l = c(l)v_{l-2}$ falls $l, l-2 \in L$. Wegen

$$\Omega = \frac{1}{2}T^2 + 2PQ + 2QP.$$

folgt

$$\omega v_l = \frac{1}{2}l^2 v_l + 2c(l)v_l + 2c(l+2)v_l,$$

also

$$\omega = \frac{1}{2}l^2 + 2c(l) + 2c(l+2).$$

Andererseits ist $T = [P, Q]$, also

$$l = c(l) - c(l+2).$$

Es ergibt sich

$$c(l) = \frac{\omega - \frac{1}{2}l^2 + 2l}{4},$$

so dass die Strukturkonstanten $c(l)$ durch die K-Typen, also L und ω festgelegt sind. □

Definition 4.1.4. Wir nennen eine Darstellung π **unitarisierbar**, wenn sie Lie-äquivalent zu einer unitären Darstellung ist.

Proposition 4.1.5. (a) *Ist $\varepsilon = 0$ und ist $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ unitarisierbar, dann ist λ in $i\mathbb{R} \cup [-1, 1]$.*

(b) *Ist $\varepsilon = 1$, dann ist $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ nur unitarisierbar, wenn $\lambda \in i\mathbb{R}$ ist.*

(c) *Für $\lambda \in (-1,1)$ ist $V_{0,\lambda}$ unitarisierbar.*

Beweis. (a) Sei $\pi = \pi_{0,\lambda}$ unitarisierbar. Wir haben $\pi(\Omega) = \frac{\lambda^2-1}{2}$. Wegen $\Omega^* = \left(\frac{1}{2}H^2 + EF + FE\right)^* = \frac{1}{2}(-H)^2 + (-E)(-F) + (-F)(-E) = \Omega$ ist der Eigenwert $\pi(\Omega)$ reell, also $\lambda^2 \in \mathbb{R}$ und damit $\lambda \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Sei also $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass $|\lambda| \leq 1$ ist, oder, was auf dasselbe hinausläuft,

$$\pi(\Omega) \leq 0.$$

Im Beweis von Satz 3.8.5 haben wir gezeigt, dass

$$Pf_l = -\frac{i}{2}(l+\lambda+1)f_{l+2}, \qquad Qf_l = -\frac{i}{2}(l-\lambda-1)f_{l-2}.$$

Und $Tf_l = lf_l$, sowie

$$\Omega = \frac{1}{2}T^2 + 2PQ + 2QP.$$

Wegen

$$P = -\frac{i}{2}H - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}F, \quad Q = \frac{i}{2}H - \frac{1}{2}E - \frac{1}{2}F$$

folgt $P^* = -Q$. Damit ist

$$\pi(\Omega)\langle f_l, f_l\rangle = \langle \Omega f_l, f_l\rangle = \frac{l^2}{2}\left\|f_l\right\|^2 - 2\left\|Pf_l\right\|^2 - 2\left\|Qf_l\right\|^2.$$

Wir können $l = 0$ wählen und erhalten $\pi(\Omega) \leq 0$.

(b) Für $\varepsilon = 1$ beachten wir zunächst $P^* = -Q$ und damit für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\lambda \langle f_1, f_1 \rangle &= \langle P f_{-1}, f_1 \rangle \\
&= -\langle f_{-1}, Q f_1 \rangle \\
&= -\left\langle f_{-1}, -\frac{i}{2}(-\lambda) f_{-1} \right\rangle \\
&= \frac{i\lambda}{2} \langle f_{-1}, f_{-1} \rangle .
\end{aligned}$$

da die Normen ≥ 0 sind, kann dies nur sein, wenn $\lambda = 0$ ist.

(c) Wir definieren ein Skalarprodukt auf $V_{1,\lambda}$ für $-1 < \lambda < 1$. Wir verlangen $\langle f_l, f_m \rangle = 0$ falls $l \neq m$. Sei $c(\lambda, l) = c(l) = \langle f_l, f_l \rangle$. Wir wählen $c(0) = 1$ und müssen die anderen $c(l)$ so bestimmen, dass P und $-Q$ adjungiert sind. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}(l+1+\lambda)c(l+2) &= \langle P f_l, f_{l+2} \rangle \\
&= -\langle f_l, Q f_{l+2} \rangle \\
&= -\left\langle f_l, -\frac{i}{2}(l+1-\lambda) f_l \right\rangle \\
&= -\frac{i}{2}(l+1-\lambda) \langle f_l, f_l \rangle \\
&= -\frac{i}{2}(l+1-\lambda) c(l)
\end{aligned}$$

also

$$c(l+2) = \frac{l+1-\lambda}{l+1+\lambda} c(l).$$

Wir sehen, dass die Definition $c(0) = 1$ und

$$c(l) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=1}^{l/2} \frac{2j-1-\lambda}{2j-1+\lambda} & l \in 2\mathbb{N}, \\ c(-l) & l < 0 \end{cases}$$

die Bedingung erfüllt. Diese Definition liefert dann ein Skalarprodukt mit $\langle Xv, w\rangle = -\langle v, Xw\rangle$ für $X \in \mathfrak{g}$. Auf der Vervollständigung operiert G dann unitär. $\square$

Proposition 4.1.6. *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die* **diskrete Serien-Darstellung** $\mathcal{D}^{\pm}_{n+1}$ *unitarisierbar.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f_l(ank) = a^{n+1}\chi_l(k)$, dann gilt

$$Pf_l = -\frac{i}{2}(l+n+1)f_{l+2}, \qquad Qf_l = -\frac{i}{2}(l-n-1)f_{l-2}.$$

Wir definieren ein Skalarprodukt auf $\mathcal{D}^{+}_{n+1}$ durch $\langle f_{n+1}, f_{n+1}\rangle = 1$ und $\langle f_l, f_l\rangle = c(l)$, wobei wir $c(l)$ so definieren müssen, dass P und $-Q$ adjungiert sind. Sei $l \in \mathbb{N}$, $l \geq n+1$, dann ist

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}(l+1+n)c(l+2) &= -\frac{i}{2}(l+n+1)\langle f_{l+2}, f_{l+2}\rangle \\
&= \langle Pf_l, f_{l+2}\rangle = -\langle f_l, Qf_{l+2}\rangle \\
&= -\left\langle f_l, -\frac{i}{2}(l-n+1)f_l\right\rangle \\
&= -\frac{i}{2}(l+1-n)c(l).
\end{aligned}$$

Damit muss gelten

$$c(l+2) = \frac{l+1-n}{l+1+n}c(l).$$

Startend mit $c(n+1) = 1$ lösen wir diese Rekursion und erhalten so das verlangte Skalarprodukt. Der Fall $\mathcal{D}^{-}_{n+1}$ geht ähnlich. $\square$

Definition 4.1.7. (Nebenserie) Sei $\lambda \in (-1, 1)$, $\lambda \neq 0$. Wir schreiben $\left(\pi^n_{1,\lambda}, V^n_{1,\lambda}\right)$ für die Vervollständigung nach diesem Skalarprodukt und nennen diese Darstellungen die Darstellungen der **Nebenserie**.

4.2 Klassifikation der irreduziblen unitären Darstellungen

Definition 4.2.1. Das **unitäre Dual** $\widehat{G}$ von G ist die Menge der Isomorphieklassen irreduzibler unitärer Darstellungen von G.

Satz 4.2.2. *Ein Vertretersystem des unitären Duals von* $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ *ist gegeben durch:*

(a) *der trivialen Darstellung* triv.

(b) *den Hauptseriendarstellungen* $\pi_{\varepsilon,it}$ *für* $t > 0$*, sowie* $\pi_{0,0}$*,*

(c) *den Nebenseriendarstellungen* $\pi_{0,\lambda}$ *mit* $0 < \lambda < 1$*,*

(d) *den Darstellungen der* **diskreten Serie** $\mathcal{D}^{\pm}_{n+1}$ *mit* $n \in \mathbb{N}$*,*

(e) *den beiden* **Steinberg-Darstellungen** $\pi^{+}_{1,0}$ *und* $\pi^{-}_{1,0}$*.*

Beweis. Zunächst machen wir uns klar, dass die angegebenen Darstellungen jeweils paarweise nicht isomorph sind. Die Casimir-Eigenwerte sind:

$$\begin{aligned}
\mathrm{triv}(\Omega) &= 0 \\
\pi_{\varepsilon,it}(\Omega) &= \frac{-t^2-1}{2} \\
\pi_{0,\lambda}(\Omega) &= \frac{\lambda^2-1}{2} \\
\mathcal{D}^{\pm}_{n+1}(\Omega) &= \frac{n^2-1}{2} \\
\pi^{\pm}_{1,0}(\Omega) &= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Damit könnte triv höchstens zu $\mathcal{D}^{\pm}_2$ isomorph sein, die sind aber unendlich-dimensional. Insgesamt unterscheiden sich alle Darstellungen durch den Casimir-Eigenwert oder die K-Typen.

Ferner ist klar, dass alle diese Darstellungen irreduzibel sind.

Lemma 4.2.3. *Für alle (ε, λ) mit $\lambda \notin \mathbb{Z}$ sind die Darstellungen $\pi_{\varepsilon,\lambda}$ und $\pi_{\varepsilon,-\lambda}$ Lie-äquivalent.*

Dies erklärt, warum nicht alle Haupt- und Nebenseriendarstellungen im Satz auftreten, denn insbesondere ist für $t \in \mathbb{R}$ die Darstellung $\pi_{\varepsilon,it}$ unitär äquivalent zu $\pi_{\varepsilon,-it}$.

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Wir müssen eine lineare Bijektion $\phi : V_{\varepsilon,\lambda,K} \to V_{\varepsilon,-\lambda,K}$ angeben, die mit den $\mathfrak{g}$-Operationen vertauscht. Sei f_l^λ die Funktion auf G mit $f_l^\lambda(ank) = a^{\lambda+1}\chi_l(k)$. Dann spannt f_l^λ den Raum $V_{\varepsilon,\lambda}(l)$ auf, wenn $\varepsilon \equiv l \mod 2$. Da ϕ den Raum $V_{\varepsilon,\lambda}(l)$ auf $V_{\varepsilon,-\lambda}(l)$ werfen muss, muss es ein Skalar $c(\lambda, l) \in \mathbb{C}^\times$ geben, so dass $\phi(f_l^\lambda) = c(\lambda, l)f_l^{-\lambda}$. Nun ist

$$Pf_l^\lambda = -\frac{i}{2}(l + \lambda + 1)f_{l+2}^\lambda, \qquad Qf_l^\lambda = -\frac{i}{2}(l - \lambda - 1)f_{l-2}^\lambda,$$

so dass

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}(l + \lambda + 1)c(\lambda, l + 2)f_{l+2}^{-\lambda} &= -\frac{i}{2}(l + \lambda + 1)\phi(f_{l+2}^\lambda) \\ &= \phi(Pf_l^\lambda) = P\phi(f_l^\lambda) = c(\lambda, l)Pf_l^{-\lambda} \\ &= -\frac{i}{2}(l - \lambda + 1)c(\lambda, l)f_{l+2}^{-\lambda} \end{aligned}$$

und wir erhalten

$$c(\lambda, l + 2) = \frac{l + 1 - \lambda}{l + 1 + \lambda}c(\lambda, l).$$

Fixiert man ein l_0, so liefert diese Rekursion im Fall $\lambda \notin \mathbb{Z}$ Werte für alle $c(\lambda, l)$ so dass ϕ in der Tat existiert. □

Nun zum Beweis des Satzes. Sei π eine irreduzible unitäre Darstellung. Nach Satz 3.7.11 gibt es ein Skalar $\omega \in \mathbb{C}$ mit

$$\pi(\Omega)v = \omega v.$$

Da $\Omega = \Omega^*$, ist $\omega \in \mathbb{R}$. Sei L die Menge aller $l \in \mathbb{Z}$ mit $V_\pi(l) \neq 0$. Dann gibt es $l_0, l_1 \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ mit $l_0 \leq l_1$ und $l_0 \equiv l_1 \mod 2$ falls beide in $\mathbb{Z}$ liegen so dass

$$L = \Big\{ l \in \mathbb{Z} : l_0 \leq l \leq l_1 \text{ und } l \equiv l_0 \mod 2 \Big\}.$$

Für jedes $l \in L$ sei v_l ein normierter Erzeuger von $V_\pi(l)$. Dieser ist nur modulo eines Skalars aus $\mathbb{T}$ bestimmt, also können wir verlangen, dass

$$Pv_l = c(l)v_{l+2}$$

mit $c(l) > 0$ gilt, falls $l, l+2 \in L$. Da $-Q$ zu P adjungiert ist, finden wir

$$Qv_l = -c(l-2)v_{l-2}$$

falls $l, l-2 \in L$. Ferner ist stets

$$Tv_l = lv_l,$$

also, da $[P, Q] = T$ folgt

$$\begin{aligned} lv_l = Tv_v &= PQv_l - QPv_l \\ &= (c(l)^2 - c(l-2)^2)v_l. \end{aligned}$$

Also ist

$$c(l+2)^2 = c(l)^2 + l + 2,$$

falls $l, l+2 \in L$. Für $l = l_0$ folgt ausserdem $l_0 = c(l_0)^2$, so dass, wenn l_0

nicht $-\infty$ ist, $l_0 > 0$ gelten muss.

Betrachten wir also zunächst den Fall $l_0 \in \mathbb{N}$. Setze $n = l_0 - 1 \geq 0$, dann folgt

$$\begin{aligned} \Omega f_{l_0} &= \frac{l_0^2}{2} f_{l_0} + 2QP f_{l_0} \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{1}{4}((n+2)^2 - n^2) \right) f_{l_0} \\ &= \frac{n^2 - 1}{2} f_{l_0}. \end{aligned}$$

Damit hat π denselben Casimir-Eigenwert wie $\mathcal{D}^+_{n+1}$ oder $\pi^+_{0,0}$ falls $n = 0$. Wir müssen nur noch feststellen, dass π dieselben K-Typen hat. Indem wir P und Q vertauschen stellen wir mit denselben Schlüssen fest, dass wenn π eine obere Grenze für die K-Typen, also $l_1 \in \mathbb{Z}$ hat, dann ist $l_1 \leq 0$, dies kann also nicht sein. Damit ist der Fall, dass es eine endliche Grenze für die K-Typen gibt, erledigt.

Seien nun alle K-Typen vorhanden, also $L = 2\mathbb{Z}$ oder $L = 2\mathbb{Z} + 1$. Sei $\omega = \pi(\Omega)$ der Casimir-Eigenwert. Wir müssen nur zeigen, dass $\omega \leq 0$ gilt, denn alle $\omega \leq 0$ werden in unserer Liste realisiert. Seien also v_l Erzeuger der K-Typen mit $\|v_l\| = 1$. Es gelte $Pv_l = c(l)v_{l+2}$ mit $c(l) > 0$. Dann folgt $Qv_l = -c(l-2)v_{l-2}$. Wegen $T = [P, Q]$ gilt

$$\begin{aligned} lv_l = Tv_l &= PQv_l - QPv_l \\ &= (c(l)^2 - c(l-2)^2)v_l, \end{aligned}$$

Also

$$c(l-2)^2 = l + c(l)^2.$$

Wegen

$$\Omega = \frac{1}{2}T^2 + 2PQ + 2QP$$

ist

$$\begin{aligned}\omega v_l &= \frac{1}{2}l^2 v_l + 2PQv_l + 2QPv_l \\ &= \left(\frac{1}{2}l^2 - 2c(l-2)^2 - 2c(l)^2\right)v_l \\ &= \left(\frac{1}{2}l^2 - 2l - 4c(l)^2\right)v_l.\end{aligned}$$

Im Fall $L = 2\mathbb{Z}$ setzen wir $l = 0$ ein und erhalten $\omega \leq 0$. Im anderen Fall setzen wir $l = 1$ und kommen zu demselben Resultat. Der Satz ist bewiesen. □

5 Der Plancherel-Satz

5.1 Kompakte Operatoren

Satz 5.1.1 (Spektralsatz). *Sei T ein kompakter normaler Operator auf dem Hilbert-Raum H. Dann gibt es eine Folge λ_n von verschiedenen komplexen Zahlen $\neq 0$, die gegen Null geht, so dass der Raum H die Orthogonalzerlegung*

$$H = \ker(T) \oplus \overline{\bigoplus_n \mathrm{Eig}(T, \lambda_n)}$$

hat. Jeder Eigenraum $\mathrm{Eig}(T, \lambda_n)$ *ist endlich-dimensional und die Eigenräume sind paarweise orthogonal.*

Beweis. Funktionalanalysis. □

Definition 5.1.2. Sei T ein kompakter Operator auf einem Hilbert-Raum H. Dann ist T^*T ein selbstadjungierter kompakter Operator mit positiven Eigenwerten. Der Operator $|T| = \sqrt{T^*T}$ ist ebenfalls kompakt. Sei $s_j(T)$ die Familie der Eigenwerte $\neq 0$ von $|T|$, wobei jeder Eigenwert gemäss seiner Vielfachheit wiederholt wird und so dass $s_{j+1}(T) \leq s_j(T)$ für alle j. Diese $s_j(T)$ heissen die **singulären Werte** von T.

Proposition 5.1.3. *Sei T eine kompakt Operator.*

(a) *Es gilt* $s_1(T) = \|T\|$ *und*

$$s_{j+1}(T) = \inf_{v_1,\dots,v_j \in H} \sup\{\|Tw\| : w \perp v_1, \dots, v_j,\ \|w\| = 1\},$$

wobei die Vektoren $v_1, \dots, v_j$ *linear unabhängige Eigenvektoren für die Eigenwerte* $s_1(T), \dots, s_j(T)$ *sind.*

(b) *Für jeden beschränkten Operator S auf H gilt* $s_j(ST) \leq \|S\|\, s_j(T)$.

Beweis. Die Formeln in (a) folgen, da die s_j Eigenwerte des selbstadjungierten Operatoren $|T|$ sind und $\|T\| = \||T|\|$. Teil (b) folgt aus Teil (a). □

5.2 Hilbert-Schmidt und Spurklasse-Operatoren

Sei $T \in \mathcal{B}(H)$, und sei (e_j) eine Orthonormalbasis von H. Die **Hilbert-Schmidt-Norm** $\|T\|_{\mathrm{HS}}$ von T ist definiert als

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2 := \sum_j \left\langle Te_j, Te_j \right\rangle.$$

Diese Zahl ist ≥ 0, kann aber $+\infty$ sein. Sie hängt nicht von der Wahl der Orthonormalbasis ab, wie wir jetzt zeigen. Dabei zeigen wir auch, dass $\|T\|_{HS} = \|T^*\|_{HS}$ für jeden beschränkten Operator T gilt. Zuerst erinnern wir, dass für je zwei Vektoren $v, w \in H$ und jede Orthonormalbasis (e_j)

gilt

$$\langle v, w\rangle = \sum_j \left\langle v, e_j \right\rangle \left\langle e_j, w \right\rangle.$$

Sei nun (ϕ_α) eine untere Orthonormalbasis. Da wir die Unabhängigkeit noch nicht gezeigt haben, schreiben wir $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2(e_i)$ bzw. $\|T\|_{\mathrm{HS}}^2(\phi_\alpha)$ für die jeweiligen Hilbert-Schmidt-Normen. Wir rechnen

$$\begin{aligned}
\|T\|_{\mathrm{HS}}^2(e_j) &= \sum_j \sum_\alpha \left\langle Te_j, \phi_\alpha \right\rangle \left\langle \phi_\alpha, Te_j \right\rangle = \sum_j \sum_\alpha \left\langle e_j, T^*\phi_\alpha \right\rangle \left\langle T^*\phi_\alpha, e_j \right\rangle \\
&= \sum_\alpha \sum_j \left\langle e_j, T^*\phi_\alpha \right\rangle \left\langle T^*\phi_\alpha, e_j \right\rangle = \|T^*\|_{\mathrm{HS}}^2(\phi_\alpha).
\end{aligned}$$

Die Änderung der Summationsreihenfolge ist gerechtfertigt, da alle Summanden positiv sind. Wir wenden dies auf den Spezialfall $(e_j) = (\phi_\alpha)$ und dann auf T^* an Stelle von T an und erhalten

$$\|T\|_{\mathrm{HS}}^2(e_j) = \|T^*\|_{\mathrm{HS}}^2(e_j) = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2(\phi_\alpha).$$

Definition 5.2.1. Ein beschränkter Operator T heisst **Hilbert-Schmidt-Operator**, falls

$$\|T\|_{HS} < \infty.$$

Lemma 5.2.2. *Für je zwei beschränkte Operatoren S, T auf H gilt $\|ST\|_{HS} \le \|S\|_{\mathrm{Op}} \|T\|_{HS}$ und $\|ST\|_{HS} \le \|S\|_{HS} \|T\|_{\mathrm{Op}}$, sowie*

$$\|T\|_{\mathrm{Op}} \le \|T\|_{HS}.$$

Für jeden unitären Operator U gilt $\|UT\|_{HS} = \|TU\|_{HS} = \|T\|_{HS}$.

Beweis. Sei (e_j) eine Orthonormalbasis. Die Ungleichung $\|ST\|_{HS}^2 = \sum_j \left\|STe_j\right\|^2 \le \|S\|_{\mathrm{Op}}^2 \sum_j \left\|Te_j\right\|^2$ impliziert die erste Abschätzung. Die zweite folgt wegen $\|T\|_{HS} = \|T^*\|_{HS}$ und derselben Aussage für die

Operatornorm.

Sei $v \in H$ mit $\|v\| = 1$. Dann existiert eine Orthonormalbasis (e_j) mit $e_1 = v$. Es ist

$$\|Tv\|^2 = \|Te_1\|^2 \le \sum_j \left\|Te_j\right\|^2 = \|T\|_{HS}^2 .$$

Die Invarianz unter Multiplikation mit unitären Operatoren ist klar, denn (Ue_j) ist wieder eine Orthonormalbasis. □

Beispiel 5.2.3. Das wichtigste Beispiel ist folgendes. Für einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ betrachte den Hilbert-Raum $L^2(X)$. Nimm an, dass das Maß σ-endlich ist, oder dass X lokalkompakt ist und μ ein äusseres Radon-Maß ist, so dass der Satz von Fubini gilt bezüglich des Produktmaßes $\mu \otimes \mu$ auf $L^2(X \times X)$. Sei k eine Funktion in $L^2(X \times X)$. Dann nennen wir k einen L^2**-Kern**.

Proposition 5.2.4. *Sei $k(x, y)$ ein L^2-kern auf X. Für $\phi \in L^2(X)$ definiere*

$$K\phi(x) := \int_X k(x, y)\phi(y)\, d\mu(y).$$

Dann existiert dieses Integral fast überall in x. Die Funktion $K\phi$ liegt in $L^2(X)$ und K setzt zu einem Hilbert-Schmidt-Operator $K : L^2(X) \to L^2(X)$ fort, so dass gilt

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_X \int_X |k(x, y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Beweis. Funktionalanalysis. □

Proposition 5.2.5. *Der Operator T ist genau dann Hilbert-Schmidt, wenn er kompakt ist und seine singulären Werte $\sum_j s_j(T)^2 < \infty$ erfüllen. Für jeden kompakten Operator gilt $\sum_j s_j(T)^2 = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2$.*

Beweis. Funktionalanalysis. □

Definition 5.2.6. Man sagt, ein kompakter Operator T ist von **Spurklasse**, falls die **Spur-Norm**,

$$\|T\|_{\mathrm{tr}} := \sum_j s_j(T),$$

endlich ist. Es folgt, dass jeder Spurklassen-Operator auch Hilbert-Schmidt ist.

Lemma 5.2.7. *Sei T ein Spurklassen-Operator und S ein beschränkter Operator.*

(a) *Die Normen $\|ST\|_{\mathrm{tr}}, \|TS\|_{\mathrm{tr}}$ sind beide $\le \|S\|\,\|T\|_{\mathrm{tr}}$.*

(b) *Sei T ein kompakter Operator auf H. Dann gilt*

$$\|T\|_{\mathrm{tr}} = \sup_{(e_i),(h_i)} \sum_i |\langle Te_i, h_i\rangle|,$$

wobei das Supremum über alle Orthonormalbasen (e_i) und (h_i) genommen wird.

Beweis. Funktionalanalysis. □

Satz 5.2.8. *Sei T ein Spurklassen-Operator. Die* **Spur**

$$\mathrm{tr}(T) := \sum_j \left\langle Te_j, e_j \right\rangle$$

hängt nicht von der Wahl der Orthonormalbasis (e_j) ab. Ist T ausserdem normal, so gilt $\mathrm{tr}(T) = \sum_n \lambda_n \dim \mathrm{Eig}(T, \lambda_n)$, wobei die Summe über die Folge der Eigenwerte (λ_n) von T läuft. Die Summe konvergiert absolut.

Beweis. Funktionalanalysis. □

Satz 5.2.9. *Sei H ein Hilbert-Raum, $\mathcal{F}$ der Raum der beschränkten Operatoren T von endlichem Rang, $\mathcal{T}$ die Menge der Spurklassen-Operatoren, $\mathcal{HS}$ die Menge der Hilbert-Schmidt-Operatoren und $\mathcal{K}$ die Menge der kompakten Operatoren. Ferner schreiben wir $\mathcal{HS}^2$ für die Menge aller Linearkombinationen von Operatoren der Form ST, wobei S und T beide in $\mathcal{HS}$ liegen.*

(a) *Die Räume $\mathcal{F}, \mathcal{T}, \mathcal{HS}$ und $\mathcal{K}$ sind Ideale in der Algebra $\mathcal{B}(H)$, die stabil unter $*$ sind.*

(b) *Der Raum $\mathcal{K}$ ist der Normabschluss von $\mathcal{F}$.*

(c) *Es gilt*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{T} = \mathcal{HS}^2 \subset \mathcal{HS} \subset \mathcal{K},$$

wobei die Inklusionen echt sind, falls H unendlich-dimensional.

Beweis. Funktionalanalysis. □

5.3 Integraloperatoren

Definition 5.3.1. Ein Maß μ auf einer glatten Mannigfaltigkeit heisst **glattes Maß**, wenn für jede glatte Karte $\phi : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ das Bildmaß eine glatte Dichte gegen das Lebesgue-Maß hat.

Ist H eine Lie-Gruppe, dann ist das Haar-Maß glatt.

Satz 5.3.2. *Sei M eine kompakte glatte Mannigfaltigkeit und μ ein glattes Maß auf M. Sei $k \in C^\infty(M \times M)$ und sei der Operator T auf $L^2(\mu)$ definiert durch*
$$Tf(x) = \int_M k(x,y) f(y)\, d\mu(y).$$
Dann ist T Spurklasse und es gilt
$$\mathrm{tr}(T) = \int_M k(x,x)\, d\mu(x).$$

Proof. Deitmar/Echterhoff: Principles of Harmonic Analysis. □

5.4 Plancherel-Formel

Proposition 5.4.1. *Ist $h \in C_c^\infty(G)$ und ist $\pi \in \widehat{G}$, dann ist $\pi(h)$ ein Spurklasse-Operator.*

Beweis. Sei $\pi \in \widehat{G}$. Dann ist $V_\pi = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} V_\pi(l)$ mit $\dim V_\pi(l) \leq 1$. Das Element $T = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ operiert auf $V_\pi(l)$ durch Multiplikation mit l. Der Operator $(1 + \pi(T)^2)^{-1}$ ist von Spurklasse. Die Spur ist
$$\mathrm{tr}\left((1+\pi(T)^2)^{-1}\right) = \sum_{l : V_\pi(l) \neq 0} \frac{1}{1+l^2} < \infty.$$

Sei $f = (1+T^2)h \in C_c^\infty(G)$, dann ist $\pi(f)$ ein stetiger Operator und daher ist
$$\pi(h) = \left(1 + \pi(T)^2\right)^{-1} \pi(f)$$
von Spurklasse. □

Satz 5.4.2 (Plancherel-Formel). *Sei $h \in C_c^\infty(G)$, dann gilt*

$$\begin{aligned} h(1) &= \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}(\pi_{0,it}(h))t\tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt \\ &+ \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{tr}(\pi_{1,it}(h))t\coth\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4}\,\mathrm{tr}(\mathcal{D}_{n+1}^{+}(h)\oplus\mathcal{D}_{n+1}^{-}(h)). \end{aligned}$$

Zur Abkürzung schreiben wir die Formel auch als

$$h(1) = \int_{\widehat{G}} \mathrm{tr}\,\pi(h)\,d\mu(\pi).$$

Der Satz beinhaltet dann eine explizite Beschreibung des Maßes μ auf $\widehat{G}$. Man nennt μ das **Plancherel-Maß** von G.

Der Beweis zieht sich durch den Rest des Abschnitts.

Doch zuvor eine andere Formulierung:

Satz 5.4.3. *Für jedes $g \in L^1(G) \cap L^2(G)$ ist $\pi(g)$ ein Hilbert-Schmidt Operator für μ-fast alle $\pi \in \widehat{G}$. Es gilt dann*

$$\begin{aligned} \|g\|_2^2 &= \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\pi_{0,it}(g)\|_{\mathcal{HS}}^2\, t\tanh\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt \\ &+ \frac{1}{8\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \|\pi_{1,it}(g)\|_{\mathcal{HS}}^2\, t\coth\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4}\left(\|\mathcal{D}_{n+1}^{+}(g)\|_{\mathcal{HS}}^2 + \|\mathcal{D}_{n+1}^{-}(g)\|_{\mathcal{HS}}^2\right). \end{aligned}$$

Beweis von Satz 5.4.3. Ist $g \in C_c^\infty$ und $h = g * g^*$, dann ist

$$h(1) = \int_G g(x) g^*(x^{-1})\, dx = \left\| g \right\|_2^2.$$

Ferner gilt $\operatorname{tr} \pi(h) = \operatorname{tr} \pi(g)\pi(g)^* = \left\| g \right\|_{\mathcal{HS}}^2$, so dass die Behauptung aus Satz 5.4.2 folgt. Da $C_c^\infty(G)$ dicht in L^2 liegt folgt die Behauptung. Die Einschränkung $g \in L^1(G)$ ist erforderlich, da sonst $\pi(g)$ nicht definiert ist. Ersetzt man $\pi(g)$ durch den Limes in der Hilbert-Schmidt-Norm, gilt der Satz auch ohne diese Einschränkung. □

Hier eine dritte Formulierung:

Satz 5.4.4. *Die Rechts- und Linkstranslation liefern eine unitäre Darstellung von $G \times G$ auf $L^2(G)$. Die Abbildung $g \mapsto (\pi(g))_{\pi \in \widehat{G}}$ ist ein $G \times G$ unitärer Isomorphismus*

$$L^2(G) \xrightarrow{\cong} \int_{\widehat{G}} \pi \otimes \pi^*\, d\mu(\pi).$$

Beweis. Der Hilbert-Raum $\mathcal{H}(\pi)$ ist isomorph zu $\pi \otimes \pi^*$. □

Lemma 5.4.5. *Die kompakte Gruppe $K = SO(2)$ operiert durch Rechts- und Linkstranslation auf $C_c^\infty(G)$. Entsprechend lässt sich $h \in C_c^\infty(G)$ in eine Summe zerlegen*

$$h = \sum_{l,m \in \mathbb{Z}} h_{l,m},$$

wobei $h_{l,m}(kxk') = \chi_{-l}(k)\chi_{-m}(k')h_{l,m}(x)$ für alle $k, k' \in K$ und alle $x \in G$ gilt. Diese Zerlegung ist eindeutig, die Summe konvergiert absolut und jedes $h_{l,m}$ liegt in $C_c^\infty(G)$. Ferner gilt für jedes $\pi \in \widehat{G}$, dass $\operatorname{tr} \pi(h_{l,m}) = 0$ ausser wenn

$l = m$. Ferner gilt bei absoluter Konvergenz

$$\operatorname{tr} \pi(h) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \operatorname{tr} \pi(h_{l,l}).$$

Beweis. Nach dem Satz von Peter-Weyl gilt für jede Darstellung η der kompakten Gruppe $K \times K$, dass

$$V_\eta = \widehat{\bigoplus}_{l,m} V_\eta(l,m),$$

wobei

$$V_\eta(l,m) = \left\{ v \in V_\eta : \eta(k,k') = \chi_l(k)\chi_m(k')v \right\}.$$

Wir wenden dies auf den Banach-Raum $C_0(G)$ mit

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$$

und der Darstellung $\eta(k,k')f(x) = f(k^{-1}x(k')^{-1})$ an. Damit folgt Existenz und Eindeutigkeit der Zerlegung.

Es folgt ausserdem

$$h_{l,m}(x) = \int_K \int_K \chi_l(k)\chi_m(k')h(kxk')\, dk\, dk',$$

so dass $h_{l,m} \in C_c^\infty(G)$.

Sei $\pi \in \widehat{G}$ und sei

$$V_\pi(l) = \left\{ v \in V_\pi : \pi(k)v = \chi_l(k)v \ \forall_{k \in K} \right\}$$

der K-Typ. Dann zerfällt V_π in eine orthogonale Summe

$$V_\pi = \widehat{\bigoplus_{l \in \mathbb{Z}}} V_\pi(l).$$

Man macht sich leicht klar, dass $\pi(h_{l,m})v = 0$ falls $v \in V_\pi(m')$ mit $m' \neq m$

und dass $\pi(h_{l,m}v \in V_\pi(m)$ gilt. Daher folgt $\operatorname{tr}\pi(h_{l,m}) = 0$ falls $l \neq m$. Die letzte Aussage folgt da $\pi(h)$ von Spurklasse ist. $\square$

Wir zeigen nun die Plancherel-Formel in dem Spezialfall, dass $h = h_{l,m}$ mit $l \neq m$. Da die Spuren alle Null sind, bedeutet die Formel dann, dass $h(1) = 0$. Für $k \in K$ gilt

$$h(1) = h(kk^{-1}) = \chi_l(k)\chi_m(k)^{-1}h(1).$$

Da $l \neq m$, gibt es ein $k \in K$ mit $\chi_m(k) \neq \chi_l(k)$, so dass $h(1) = 0$ folgt.

Gesetzt den Fall, wir haben die Plancherel-Formel für $h = h_{l,l}$ für alle l gezeigt. Für beliebiges h folgt dann durch Summation

$$h(1) = \sum_l h_{l,l}(1) = \sum_l \int_{\widehat{G}} \operatorname{tr}\pi(h_{l,l})\, d\mu(\pi).$$

Wir können die verlangte Formel zeigen, wenn wir die Summe und das Integral vertauschen dürfen. Dies dürfen wir zum Beispiel dann, wenn alle Spuren ≥ 0 sind. Dies ist zum Beispiel garantiert, wenn $h = g * g^*$ für ein $g \in C_c^\infty(G)$. Wir schreiben $\sigma(f, g) = f * g^*$. Diese Abbildung ist sesquilinear, erfüllt daher die **Polarisierungsformel**:

$$\sigma(f, g) = \frac{1}{4}\left(\sigma(f+g) - \sigma(f-g) + i\sigma(f+ig) - i\sigma(f-ig)\right),$$

wobei wir $\sigma(F) = \sigma(F, F)$ geschrieben haben. Das bedeutet, dass die Plancherel-Formel für alle Funktionen der Form $f * g^*$ mit $f, g \in C_c^\infty(G)$ folgt. Die Menge solcher Funktionen liegt dicht in $C_c^\infty(G)$, und zwar auch in Hinsicht auf die Spur-Norm.

Es reicht also, die Plancherel-Formel im Fall $h = h_{l,l}$ zu beweisen. Wir werden dies allerdings nur im Spezialfall $l = 0$ vorführen, der allgemeine Fall folgt ähnlichen Techniken, ist nur mehr Rechnerei.

5.5 Die Hecke-Algebra

Wir erinnern uns an Korollar 2.3.3, welches besagt, dass die Abbildung

$$K\backslash G/K \to [2,\infty), \qquad x \mapsto \mathrm{tr}(x^t x)$$

eine Bijektion ist.

Definition. Eine Funktion f auf G heisst K**-bi-invariant**, falls sie über $K\backslash G/K$ faktorisiert. Wir definieren die **Hecke-Algebra** $\mathcal{H}$ von G als die Menge aller K-bi-invarianten Funktionen f auf G, die in $L^1(G)$ liegen. Diese Algebra ist uns aus Abschnitt 3.7 als C_0 bekannt. Der Raum $\mathcal{H}$ ist der Raum aller $f \in L^1(G)$ mit

$$L_k f = f = R_k f$$

für jedes $k \in K$, wobei $L_k f(x) = f(k^{-1}x)$ und $R_k f(x) = f(xk)$. Für $f, g \in L^1(G)$ gilt

$$L_k(f * g) = (L_k f) * g \quad \text{und} \quad R_k(f * g) = f * (R_k g).$$

Damit ist $\mathcal{H}$ eine Faltungs-Unteralgebra von $L^1(G)$. Ferner ist $\mathcal{H}$ stabil unter der Involution $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, also ist $\mathcal{H}$ eine *-Unteralgebra von $L^1(G)$. Aus Abschnitt 3.7 wissen wir:

- Die Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ ist kommutativ.
- Für jede irreduzible unitäre Darstellung π von G ist der Raum der K-Invarianten,

  $$V_\pi^K = \{v \in V_\pi : \pi(k)v = v \ \forall k \in K\}$$

  null oder eindimensional.

- Für jede irreduzible Darstellung π von G und für jedes $f \in \mathcal{H}$ gilt $\pi(f) = P_K \pi(f) P_K$, wobei $P_K : V_\pi \to V_\pi^K$ die Orthogonalprojektion ist.

Sei $\widehat{G}_K$ die Menge aller $\pi \in \widehat{G}$, für die der Raum V_π^K von K-invarianten Vektoren nicht Null ist. Nach Satz 4.2.2 besteht $\widehat{G}_K$ genau aus

- der trivialen Darstellung,
- der unitären Hauptserie $\pi_{ir} = \pi_{0,ir}$ mit $r > 0$ und
- der Nebenserie $\pi_\lambda = \pi_{0,\lambda}$ mit $0 < \lambda < 1$.

Wir schreiben $V_\lambda = V_{0,\lambda}$. Der eindimensionale Raum V_λ^K wird durch das Element p_λ mit
$$p_\lambda(ank) = a^{\lambda+1}$$
aufgespannt. Nach Korollar 2.3.3 gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ eine Funktion ϕ_f auf $[0,\infty)$ so dass
$$f(x) = \phi_f(\mathrm{tr}(x^t x) - 2).$$
Betrachte den Spezialfall $x \in AN$, sagen wir $x = a_t n_s = \begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 1 & s \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$, dann ist $\mathrm{tr}(x^t x) = (s^2+1)e^{2t} + e^{-2t}$.

Definition 5.5.1. Für $f \in \mathcal{H}$ gibt es eine Funktion h_f so dass
$$\pi_{ir}(f) p_{ir} = h_f(r) p_{ir}.$$

Diese Funktion h_f heisst die **Eigenwertfunktion** von f. Hier kann ir in $i\mathbb{R} \cup (0, 1/2)$ gewählt werden. Da $p_{ir}(1) = 1$, können wir $h_f(r)$ ausrechnen:
$$h_f(r) = \pi_{ir}(f) p_{ir}(1) = \int_G f(x) p_{ir}(x)\, dx$$

Lemma 5.5.2. *Die Abbildung $f \mapsto h_f$ ist injektiv auf $\mathcal{H}$. Es gilt*

$h_f(r) = \operatorname{tr}\pi_{ir}(f)$, *und für* $f, g \in \mathcal{H}$ *gilt*

$$h_{f*g} = h_f h_g.$$

Die Funktion h_f *kann durch die folgenden Integraltransformationen berechnet werden. Zunächst sei*

$$q_f(x) = A(\phi_f)(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi_f(x + s^2)\, ds, \qquad x \geq 0.$$

Die Abbildung $\phi \mapsto A(\phi)$ *heisst die* **Abel-Transformation**. *Als nächstes definiere*

$$g_f(u) := q_f(e^{2u} + e^{-2u} - 2), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt

$$h_f(r) = \int_{\mathbb{R}} g_f(u) e^{iru}\, du.$$

Beweis. Die Injektivität folgt aus der Injektivität der einzelnen Transformationen, die jeweils klar ist.

Es ist $\pi_{ir}(f) = h_f(r)\mathrm{Id}_{V_\pi^K}$ und $h_{f*g} = h_f h_g$ folgt aus $\pi(f * g) = \pi(f)\pi(g)$ für alle $f, g \in L^1(G)$.

Mit Hilfe der Iwasawa-Koordinaten und der K-Invarianz von f rechnen wir

$$\begin{aligned}
h_f(r) &= \int_{AN} f(an) a^{ir+1}\, da\, dn \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\begin{pmatrix} e^t & \\ & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s \\ & 1 \end{pmatrix}\right) e^{(ir+1)t}\, ds\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_f((s^2 + 1)e^{2t} + e^{-2t} - 2) e^{(ir+1)t}\, ds\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_f(s^2 + e^{2t} + e^{-2t} - 2) e^{irt}\, ds\, dt,
\end{aligned}$$

wobei wir die Substitution $s \mapsto e^{-t}s$ benutzt haben. Da $q_f(x) = A\phi_f(x)$

und g gerade ist, gilt

$$h_f(r) = \int_{-\infty}^{\infty} q_f(e^{2t} + e^{-2t} - 2)e^{irt}\,dt = \int_{\mathbb{R}} g_f(u)e^{iru}\,du. \qquad \square$$

Definition. Sei $\mathcal{S}_{[0,\infty)}$ der Raum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen ϕ auf $[0,\infty)$, so dass für jedes $m, n \geq 0$ die Funktion $x^n\phi^{(m)}(x)$ beschränkt ist.

Lemma 5.5.3. *Die Abel-Transformation ist invertierbar in folgendem Sinne: Sei ϕ stetig differenzierbar auf $[0,\infty)$, so dass*

$$|\phi(x+s^2)|, |s\phi'(x+s^2)| \ \leq \ g(s)$$

für ein $g \in L^1([0,\infty))$, dann ist $q = A(\phi)$ stetig differenzierbar und

$$\phi = \frac{-1}{\pi}A(q').$$

Ferner bildet die Abel-Transformation den Raum $\mathcal{S}_{[0,\infty)}$ in sich selbst ab und definiert eine Bijektion $A : \mathcal{S}_{[0,\infty)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{S}_{[0,\infty)}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass für jedes ϕ, das die Bedingungen des Lemmas erfüllt, gilt $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$. Hierfür sei $h(s) = s\phi'(s^2)$. Dann ist h is integrierbar auf $[0,\infty]$. Es folgt

$$\phi(y) - \phi(0) = \int_0^y \frac{h(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{y}} h(u)\,du.$$

Mit $y \to \infty$ folgt, dass $\lim_{x\to\infty}\phi(x)$ existiert und da $\phi(x+s^2)$ integrierbar ist, ist dieser Limes gleich Null.

Mit dem Satz über dominierte Konvergenz sieht man, dass q stetig differenzierbar ist und dass $q' = A(\phi')$. Mit Polarkoordinaten rechnen wir

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\phi'(x+s^2+t^2)\,ds\,dt = -2\int_0^\infty r\phi'(x+r^2)\,dr$$
$$= -\phi(x+r^2)\big|_0^\infty = \phi(x).$$

Es ist leicht zu sehen, dass die Abel-Transformation und ihre Inverse den Raum $\mathcal{S}_{[0,\infty)}$ in sich selbst abbilden. □

Lemma 5.5.4. *Sei E der Raum aller ganzen Funktionen h so dass für alle $m, n \geq 0$ und jedes $k \in \mathbb{R}$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto x^n h^{(m)}(x+ki)$ beschränkt ist. Sei F der Raum aller glatten Funktionen g auf $\mathbb{R}$ so dass für jedes $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ die Funktionen $u \mapsto (e^u + e^{-u})^n g^{(m)}(u)$ beschränkt ist. Dann definiert die Fourier-Transformation*

$$\mathcal{F}(h)(u) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} h(r)e^{-iru}\,dr, \qquad h \in E,$$

eine lineare Bijektion $\mathcal{F} : E \xrightarrow{\cong} F$. Ihre Inverse ist durch

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(r) = \int_{\mathbb{R}} g(u)e^{iru}\,du$$

gegeben. Die Abbildung $\mathcal{F}$ bildet den Unterraum der geraden Funktionen E^{ev} in E bijektiv auf den Raum der geraden Funktionen F^{ev} in F ab.

Beweis. Der Raum F kann auch charakterisiert werden als der Raum aller glatten Funktionen g, so dass $e^{-ku}g^{(m)}(u)$ für jedes $k \in \mathbb{R}$ und jedes $m \geq 0$ beschränkt ist. Der Raum F ist nach Definition ein Unterraum des Schwartz-Raums $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen, ist die Einschränkung $h \mapsto h|_{\mathbb{R}}$ eine Injektion von E in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Da die Fourier-Transformation eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, reicht es zu zeigen, dass sie E nach F abbildet und umgekehrt. Dies ist durch eine leichte Rechnung einzusehen. □

Proposition 5.5.5. *Sei $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ der Raum aller glatten Funktionen f auf G von der Form $f(x) = \phi(\mathrm{tr}(x^t x) - 2)$ für ein $\phi \in \mathcal{S}_{[0,\infty)}$. Dann ist $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ eine Unteralgebra der Hecke-Algebra $\mathcal{H}$ und die Abbildung $\Psi : f \mapsto h_f$ (Definition 5.5.1) ist eine Bijektion $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} \xrightarrow{\cong} E^{\mathrm{ev}}$.*

Für ein gegebenes $h \in E^{\mathrm{ev}}$ wird die Funktion $f = \Psi^{-1}(h)$ wie folgt berechnet. Zunächst definiert man die gerade Funktion

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(r) e^{-iru}\, dr.$$

Dann wird $q : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ definiert als die eindeutig bestimmte Funktion mit $g(u) = q(e^{2u} + e^{-2u} - 2)$. Ferner setzt man $\phi = -\frac{1}{\pi} A(q')$. Dann ist

$$f(x) = \phi(\mathrm{tr}(x^t x) - 2).$$

Beweis. Zuerst gibt die Abbildung $q \mapsto g$ mit $g(u) = q(e^u + e^{-u} - 2)$ eine Bijektion zwischen $\mathcal{S}_{[0,\infty)}$ und dem Raum F^{ev}. Dann folgt die Behauptung aus Lemma 5.5.3 und Lemma 5.5.4. □

Wir zeigen nun, dass für jedes $f \in \mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ gilt

$$f(1) = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{tr}(\pi_{ir}(f))\, r \tanh\left(\frac{\pi r}{2}\right) dr.$$

Beweis. Sei $h = h_f$, $\phi = \phi_f$ und $g = g_f$ wie in der Diskussion am Ende des letzten Abschnitts. Beachte, dass

$$A\phi(e^{2u} + e^{-2u} - 2) = g(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(r) e^{iru}\, dr,$$

woraus folgt, dass $g'(u) = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r h(r) e^{iru}\, dr$. Mit Lemma 5.5.3 folgt

$$f(1) = \phi(0) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (A\phi)'(x^2)\, dx.$$

Da $g_f(u) = A\phi(e^{2u} + e^{-2u} - 2) = A\phi((e^u - e^{-u})^2)$, erhalten wir $g'(u) = 2(A\phi)'((e^u - e^{-u})^2)(e^{2u} - e^{-2u})$. Setzen wir $x = e^u - e^{-u}$ ins Integral ein, so gibt das

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{g'(u)}{e^u - e^{-u}}\, du \\ &= -\frac{i}{4\pi^2}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} rh(r)\frac{e^{iru}}{e^u - e^{-u}}\, dr\, du. \end{aligned}$$

Da h gerade ist, ist dies auch

$$-\frac{i}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}} rh(r)\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iru} - e^{-iru}}{e^u - e^{-u}}\, du\, dr.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} -\frac{i}{8\pi^2}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iru} - e^{-iru}}{e^u - e^{-u}}\, du &= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^\infty \frac{e^{iru} - e^{-iru}}{e^u - e^{-u}}\, du \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^\infty e^{-u}\frac{e^{iru} - e^{-iru}}{1 - e^{-2u}}\, du \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^\infty e^{-u}(e^{iru} - e^{-iru})\sum_{n=0}^\infty e^{-2nu}\, du \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i}\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty e^{-u(2n+1-ir)}\, du - \int_0^\infty e^{-u(2n+1+ir)}\, du \\ &= \frac{1}{4\pi^2 i}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+1-ir} - \frac{1}{2n+1+ir}. \end{aligned}$$

Für diesen letzten Ausdruck schreiben wir vorübergehend $\psi(r)$. Dann ist

$$\psi(i(r+1)) = \frac{1}{4\pi^2 i}\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2n+2+r} - \frac{1}{2n-r} = \frac{1}{8\pi i}\cot\left(\frac{\pi r}{2}\right).$$

Der letzte Schritt ist die Partialbruchzerlegung des Cotangens.

Wir folgern

$$\psi(r) = \frac{1}{8\pi i} \tan\left(\frac{\pi i r}{2}\right) = \frac{1}{8\pi} \tanh\left(\frac{\pi r}{2}\right).$$

Die zweite Aussage des Satzes ist bewiesen. Für die erste setze $f = g * g^*$ und wende die zweite Aussage auf dieses f an. Auf der einen Seite hat man dann $f(1) = g * g^*(1) = \|g\|_2^2$ und auf der unteren für $\pi \in \widehat{G}$,

$$\operatorname{tr} \pi(f) = \operatorname{tr} \pi(g)\pi(g)^* = \|\pi(g)\|_{\mathrm{HS}}^2 .$$

Wir haben den Satz jetzt fuer K-bi-invariante Funktionen bewiesen. Dass soll uns genuegen, denn der allgemeiner Fall geht genauso, mit nur etwas mehr Rechnung. $\square$