

Zur Aufgabe 5a. I.A. bildet eine stetige Abbildung $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ Cauchtfolgen **nicht** auf Cauchyfolgen ab: Ein Gegenbeispiel hierzu ist die Abbildung $(0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto 1/x$, die die Cauchyfolge $(1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ (keine Cauchtfolge) abbildet. Die Menge $(0, \infty)$ ist dabei mit der euklidischen Metrik versehen. Die Aussage ist aber richtig wenn der metrischer Raum (X, d_X) vollständig ist.

Zur Aufgabe 5b. Man bemerke zunächst, dass \mathbb{Q} dicht in \mathbb{R} liegt, d.h., in jeder Umgebung $B_\varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$, gibt es rationale Zahlen.

- Eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ kann höchstens eine stetige Fortsetzung $\widehat{f}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen: Sind $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2$ zwei stetige Fortsetzungen von f , so ist $g := \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die 0 auf \mathbb{Q} ist. Da für jedes $r \in \mathbb{R}$ wegen Dichtheit von \mathbb{Q} eine Folge (q_n) aus \mathbb{Q} existiert, die gegen r konvergiert, so gilt $g(r) = \lim_{q_n \rightarrow r} g(q_n) = 0$, d.h., $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$ auf ganz \mathbb{R}

- Eine stetige Funktion $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt nicht immer eine stetige Fortsetzung. Z.B. sei $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl. Dann ist die Funktion $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > r \\ -1 & \text{falls } x < r \end{cases}$ eine stetige Funktion auf \mathbb{Q} . Wegen

$$-1 = \lim_{q \nearrow r} f(q) \neq \lim_{q \searrow r} f(q) = 1,$$

gibt es keine Fortsetzung auf ganz \mathbb{R} , die stetig in r wäre.

Zur Aufgabe 5c. Auf dem Produkt $X \times Y$ definiere man die folgende Abstandsfunktion:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

Man überprüfe ohne Mühe, dass d die Metrixiome 1.1.1 erfüllt. Die (offenen) Kugeln mit Mittelpunkt (x, y) bzgl. d haben die Gestalt $B_r^{X \times Y}(x, y) := B_r^X(x) \times B_r^Y(y)$ für ein $r > 0$. Um zu zeigen, dass auch die Mengen $B_r^X(x) \times B_s^Y(y)$ d -offen sind, reicht es für jedes $(u, v) \in B_r^X(x) \times B_s^Y(y)$ eine offene ρ -Kugel $B_\rho^{X \times Y}(u, v)$ zu finden mit $B_\rho^{X \times Y}(u, v) \subset B_r^X(x) \times B_s^Y(y)$: Das ist der Fall für jedes ρ mit $\rho < \min\{r - d_X(u, x), s - d_Y(v, y)\}$: $(a, b) \in B_\rho^X(u) \times B_\rho^Y(v)$ so folgt $d_X(a, x) \leq d_X(a, u) + d_X(u, x) \leq r - d_X(u, x) + d_X(u, x) = r$, i.e., $a \in B_r^X(x)$. Analog zeigt man, dass $b \in B_s^Y(y)$.

- Die Vollständigkeit von $(X \times Y, d)$ sieht man wie folgt: Es sei $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchyfolge in $(X \times Y, d)$, d.h., für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein N_ε mit

$$d((x_n, y_n), (x_m, y_m)) = \max\{d_X(x_n, x_m), d_Y(y_n, y_m)\} \leq \varepsilon$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N_\varepsilon$. Aus der obigen Ungleichung folgt jedoch, dass (x_n) eine Cauchyfolge in (X, d_X) und (y_n) eine Cauchyfolge in (Y, d_Y) ist. Nach Voraussetzung (Vollständigkeit von d_X und d_Y) existieren also die Grenzwerte $x_n \rightarrow x \in X$ und $y_n \rightarrow y \in Y$. Dann aber ist (x, y) der Grenzwert der Folge $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Damit ist die Vollständigkeit von $(X \times Y, d)$ bewiesen.

Zur Aufgabe 9. Konstruktion einer dichten und abzählbaren Teilmenge in X : Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{U}_n = \{B_{1/n}(x) : x \in X\}$ eine Überdeckung von X mit Kugeln mit festem Radius $1/n$. Da X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\mathfrak{V}_n = \{B_{1/n}(x_1), \dots, B_{1/n}(x_{k_n})\} \subset \mathfrak{U}_n$ von X . Dann ist $\mathfrak{W} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{V}_n$ abzählbar als abzählbare Vereinigungen von endlichen Mengen. Man wähle jetzt aus jeder offenen Teilmenge $B_{1/m}(x_{k_m})$ in \mathfrak{W} einen beliebigen Punkt $z = z_{m, k_m}$ aus. Dann ist $Z = \bigcup \{z_{m, k_m}\}$ eine abzählbare Teilmenge, die dicht in X ist, d.h., für jedes $x \in X$ und jede Umgebung $U(x) \subset X$ gibt es einem Punkt aus Z in $U(x)$. Das sieht man wie folgt: In jedem $U(x)$ gibt es nämlich eine Kugel $B_r(x) \subset U(x)$ (das ist die Definition einer Umgebung). Für $n \in \mathbb{N}$ mit $1/n < r/2$ gibt es nach Konstruktion von \mathfrak{V}_n eine Kugel $B_{1/n}(y) \in \mathfrak{V}_n$, die den Punkt x enthält. Nach Wahl der Radii gilt $B_{1/n}(y) \subset B_r(x) \subset U(x)$. Damit enthält $U(x)$ mindestens einen Punkt aus Z , z.B. den in $B_{1/n}(y)$ gewählten Punkt z .

Zur Aufgabe 16. Der Laplace-Operator wird in den kartesischen Koordinaten (x, y, z) auf \mathbb{R}^3 durch

$$\Delta : C^2(\mathbb{R}^3) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^3), \quad f \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z}$$

gegen; er ist also ein Differentialoperator zweiter Ordnung, siehe Abschnitt 1.4.15 in der Vorlesungszusammenfassung. Um eine Formel in den Zylinderkoordinaten (r, θ, z) für Δ zu finden, muss man zunächst die Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial x}, \dots, \frac{\partial}{\partial z}$ in den Zylinderkoordinaten ausdrücken, d.h., wir suchen die Darstellungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \alpha_1(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \alpha_2(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha_3(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\ (\ddagger) \quad \frac{\partial}{\partial y} &= \beta_1(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \beta_2(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \beta_3(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \gamma_1(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \gamma_2(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \gamma_3(r, \theta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

Kennt man die Funktionen α_j , β_j und γ_j explizit, so muss man dann nur noch $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ausrechnen.

Erste Lösungsmöglichkeit. Gemäß der Formel

$$X(p) = X\varphi_1(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \Big|_p + \dots + X\varphi_n(p) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_n} \Big|_p$$

für ein lokales Koordinatensystem $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ auf $U \subset E$, wobei $X : U \rightarrow E$ ein beliebiges Vektorfeld ist, gilt in unserem Fall:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Big|_p &= \frac{\partial}{\partial x}(r) \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x}(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{sign}(y) \cdot \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_p + \frac{\partial}{\partial x}(z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} \Big|_p \end{aligned}$$

Analog erhält man Formeln für $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$. Damit hat man alle Koeffizientenfunktionen bestimmt. Da das Ausrechnen all dieser partiellen Ableitungen zwar einfach aber langweilig ist, präsentieren wir noch eine

Zweite Lösungsmöglichkeit. Rechentechnisch einfacher ist der folgender Weg: Das Vektorfeld $X_1 := \frac{\partial}{\partial x}$ ist eindeutig durch die Bedingungen

$$X_1(x) = 1, \quad X_1(y) = X_1(z) = 0$$

festgelegt. Analog ist $X_2 := \frac{\partial}{\partial y}$, bzw. $X_3 := \frac{\partial}{\partial z}$ durch $X_2(y) = 1, X_2(x) = X_2(z) = 0$ bzw. $X_3(z) = 1, X_3(x) = X_3(y) = 0$ eindeutig festgelegt. Die Koeffizientenfunktionen α_j , β_j und γ_j in (\ddagger) lassen sich nun leicht ermitteln:

$$\begin{array}{lll} 1 = \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 r \sin \theta & & \alpha_1 = \cos \theta \\ 0 = \alpha_1 \sin \theta + \alpha_2 r \cos \theta & \text{impliziert} & \alpha_2 = -\frac{\sin \theta}{r} \\ 0 = & \alpha_3 & \alpha_3 = 0 \\ \\ 0 = \beta_1 \cos \theta - \beta_2 r \sin \theta & & \beta_1 = \sin \theta \\ 1 = \beta_1 \sin \theta + \beta_2 r \cos \theta & \text{impliziert} & \beta_2 = \frac{\cos \theta}{r} \\ 0 = & \beta_3 & \beta_3 = 0 \end{array}$$

und schließlich $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$.

Nachdem also $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ in den Zylinderkoordinaten ermittelt sind, können wir den Laplaceoperator berechnen:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}$$

Zur Aufgabe 26. Es sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $(\mathcal{L}(E, E), \|\cdot\|_{op})$ der Banachraum aller stetigen linearen Abbildungen $E \rightarrow E$ und $GL(E) \subset \mathcal{L}(E, E)$ die Gruppe aller invertierbaren Abbildungen. Die Idee des Beweises, dass $GL(E)$ eine offene Teilmenge von $\mathcal{L}(E, E)$ beruht auf der folgenden

Beobachtung. Es sei $\text{Id} \in GL(E)$ die identische Abbildung. Dann für jedes $A \in \mathcal{L}(E, E)$ mit $\|A\|_{op} < 1$ ist $\text{Id} - A$ invertierbar, d.h., die offene Normkugel $B_1(\text{Id}) \subset \mathcal{L}(E, E)$ ist in $GL(E)$ enthalten.

Beweis: Wir nutzen hier die Tatsache aus, dass für beliebige $X, Y \in \mathcal{L}(E, E)$ die Ungleichung $\|X \circ Y\|_{op} \leq \|X\|_{op} \|Y\|_{op}$ gilt. Motiviert durch die geometrische Reihe behaupten wir, dass das Inverse von $\text{Id} - A$ existiert, und zwar es gilt

$$(\text{Id} - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

Beh. 1. Die unendliche Summe konvergiert gegen ein Element $B \in \mathcal{L}(E, E)$. Wir behaupten nämlich, dass $S_n := \sum_{k=0}^n A^k$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(E, E)$ ist: Daraus folgt wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(E, E)$ (bzgl. der Operatornorm $\|\cdot\|_{op}$), dass der Grenzwert $B := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ existiert. Es bleibt nachzuweisen, dass S_n eine Cauchyfolge ist.

$$\|S_n - S_m\|_{op} = \left\| \sum_{k=m+1}^n A^k \right\|_{op} \leq \sum_{k=m+1}^n \|A^k\|_{op} \leq \sum_{k=m+1}^n \|A\|_{op}^k$$

Da nun nach Voraussetzung $\|A\|_{op} < 1$, konveriert die geometrische Reihe (der reellen Zahlen) $\sum_{k=0}^{\infty} \|A\|_{op}^k$ absolut, also insbesondere ist $s_n := \sum_{k=0}^n \|A\|_{op}^k$ eine Cauchyfolge. Daraus folgt dass auch S_n eine Cauchyfolge ist.

Beh. 2. $B \circ (\text{Id} - A) = (\text{Id} - A) \circ B = \text{Id}$, d.h., $B = (\text{Id} - A)^{-1}$, also $\text{Id} - A$ ist invertierbar:

$$B \circ (\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \circ (\text{Id} - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Id} - A^{n+1} = \text{Id}$$

Die letzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A^{n+1}\|_{op} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A\|_{op}^{n+1} = 0$. Genauso beweist man, dass $(\text{Id} - A) \circ B = \text{Id}$ gilt.

Jetzt lässt sich leicht zeigen, dass um jedes Element $g \in GL(E)$ eine offene Normkugel $B_r(g) \subset \mathcal{L}(E, E)$ existiert, für die sogar $B_r(g) \subset GL(E)$ gilt: Man muss bloß $r < 1/\|g^{-1}\|$ wählen: Dann gilt nämlich für jedes $A \in \mathcal{L}(E, E)$ mit $\|A\| < r$ $g - A = g \circ (\text{Id} - g^{-1} \circ A)$ und $\text{Id} - g^{-1} \circ A$ ist nach den vorhergehenden Überlegungen invertierbar, denn

$$\|g^{-1} \circ A\| \leq \|g^{-1}\| \cdot \|A\| < \|g^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|g^{-1}\|} = 1.$$

Dann aber ist $g - A$ als Verknüpfung zweier invertierbaren linearen Abbildungen wieder invertierbar.

Die Frechet-Ableitung von $\text{inv} : \text{GL}(E) \rightarrow \text{GL}(E)$ ist, falls existent, eine stetige lineare Abbildung $\mathcal{L}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E)$. Aus der Entwicklung

$$\begin{aligned} \text{inv}(g+h) &= (g+h)^{-1} = (\text{Id} + g^{-1} \circ h) \circ g^{-1} = \left(\text{Id} - g^{-1} \circ h + g^{-1} \circ h \circ g^{-1} \circ h - \dots \right) \circ g^{-1} \\ &= \text{inv}(g) - g^{-1} \circ h \circ g^{-1} + R(h) \end{aligned}$$

für kleine $h \in \mathcal{L}(E, E)$ entnehmen wir, das der Kandidat für $D(\text{inv})$

$$D(\text{inv})_g : \mathcal{L}(E, E) \rightarrow \mathcal{L}(E, E), \quad D(\text{inv})_g(h) = -g^{-1} \circ h \circ g^{-1}$$

ist. Um zu bestätigen, dass die Abbildung $\mathcal{L}(E, E) \ni v \mapsto -g^{-1} \circ v \circ g^{-1}$ tatsächlich die Ableitung von inv ist, müssen wir nachweisen, dass $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{R(h)}{\|h\|_{op}} = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\|R(h)\|_{op}}{\|h\|_{op}} &= \frac{\left\| \sum_{k=2}^{\infty} ((-1)^k (g^{-1} \circ h)^k) \circ g^{-1} \right\|_{op}}{\|h\|_{op}} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\|g^{-1}\|_{op}^{k+1} \cdot \|h\|_{op}^k}{\|h\|_{op}} = \\ &= \|g^{-1}\|_{op}^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (\|h\|_{op} \|g^{-1}\|_{op})^k \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

Zur Aufgabe 31a Durch die Substitution der Gleichung $c_1 = x^2 + y$ in $c_2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + y$ sieht man, dass für alle $c_2 < c_1$ die Niveaumengen $M_{(c_1, c_2)}$ leer sind. Für den Rest der Aufgabe beschränken wir und daher nur auf Paare $c = (c_1, c_2)$ mit $c_2 \geq c_1$.

Als Nächstes bestimmen wir die Menge D der Punkte in \mathbb{R}^4 , in denen die Jacobimatrix von g (stetig differenzierbar!) den Rang ≤ 1 hat: Da

$$\text{Jac}_{(x,y,z,w)}(g) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 2x & 1+2y & 2z & 2w \end{pmatrix},$$

so ist die Teilmenge D gleich der Menge, auf der *alle* 2×2 Minoren von $\text{Jac}(g)$ verschwinden. Also:

$$D = \{(x, y, z, w) : z = 0 \wedge w = 0 \wedge xy = 0\}$$

Falls $M_c \cap D = \emptyset$, so ist M_c , falls nicht leer, eine (differenzierbare) Untermannigfaltigkeit (denn dann $M_c \subset (\mathbb{R}^4 \setminus D)$, und in allen Punkten der letztgenannten Menge ist der Rang von $\text{Jac}(g)$ gleich 2, so daß Bem. 1.4.30 angewendet werden kann). Falls $D \cap M_c \neq \emptyset$, so gilt entweder $c_1 = x^2 = c_2$, d.h., $c_1 = c_2 \geq 0$ oder $y = c_1 \wedge y + y^2 = c_2$, d.h., $c_2 = c_1 + c_1^2 \geq -1/4$. Damit wurde gezeigt, dass für alle $c = (c_1, c_2)$ mit $c_1 \geq c_2$, sowie $c_1 \neq c_2$ und $c_2 \neq c_1 + c_1^2$ die Niveaumengen M_c 2-dimensionale Untermannigfaltigkeiten sind.

Es bleibt der Fall $c_1 = c_2 \geq 0$ sowie $c_2 = c_1 + c_1^2$. Da $M_{(0,0)} = \{(0, 0, 0, 0)\}$ und $M_{(r^2, r^2)} = \{(\pm r, 0, 0, 0)\}$, habe wir in diesen Fällen 0-dimensionale Mannigfaltigkeiten, d.h., Punkte vorliegen. In dem verbleibenden Fall gilt für $s < 0$ $M_{(s, s+s^2)} = \{(0, s, 0, 0)\}$; also ist $M_{(s, s+s^2)}$ ein Punkt. Für $s > 0$ (der Fall $s = 0$ wurde bereits behandelt) gilt

$$M_{(s, s+s^2)} = \{(\pm\sqrt{s-y}, y, z, w) : y^2 + z^2 + w^2 = s^2\} \quad \text{und} \quad M_{(s, s+s^2)} \cap D = \{(0, s, 0, 0)\}$$

Man kan zeigen, dass der Punkt $(0, s, 0, 0) \in M_{(s, s+s^2)}$ lokal wie eine Kegelspitze aussieht, und daher ist $M_{(s, s+s^2)}$ keine glatte Untermannigfaltigkeit.

Zur Aufgabe 31d Berechnet man das Differential $D\varphi$ von $\varphi(x, y) = x^2 - y^3$, so stellt man fest, dass der Rang von $D\varphi$ nur in $(0, 0) \in P$ verschwindet.

BEH.: Der Punkt $(0, 0)$ ist kein Mannigfaltigkeitspunkt von P

Andernfalls gäbe es eine differenzierbare Kurve $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ mit $p(0) = (0, 0)$, so dass $p(t) \in P$ für alle t aus einer kleinen Nullumgebung und $(\dot{p}_1(0), \dot{p}_2(0)) \neq (0, 0)$. Das führt aber zum Widerspruch: Da $p_1(t)^2 = p_2(t)^3$ gelte muss, folgt aus $p_1(t) = p_2(t)^{3/2}$ dass $\dot{p}_1(0) = 3/2 \cdot p_2(0)^{1/2} \cdot \dot{p}_2(0) = 0$. Dann müsste aber $\dot{p}_2(0) \neq 0$. Da jedoch p_2 im Nullpunkt verschwindet, gibt es eine stetige Funktion $v_2(t)$ mit $v_2(0) = \dot{p}_2(0)$ und dann gilt $p_2(t) = t \cdot v_2(t)$ in einer kleiner Umgebung von 0. (Taylorentwicklung mit Restglied). O.B.d.A nehmen wir an, dass $v_2(0) = \dot{p}_2(0) > 0$. Dann müsste für ein geeignet gewähltes $\varepsilon > 0$ und $t \in (-\varepsilon, 0)$, $p_2(t) = t \cdot v_2(t) < 0$ gelten, was der Gleichung $p_2(t)^3 = p_1(t)^2 \geq 0$ widerspricht.