Probeklausur

- Zulässige Hilfsmittel: 2 handbeschriebene DIN A4 Seiten.
- Jede korrekt gelöste Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet. Von den 6 Aufgaben werden 4 bewertet. Die maximal erreichbare Punktenzahl ist daher 32.
- Sie müssen vor der Klausurabgabe die vier Aufgaben kennzeichen, die korrigiert und bewertet werden sollen. Andernfalls behalten sich die Korrekteure vor, diese Auswahl selbst zu treffen.
- Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie etwa die Hälfte der möglichen Punkte (d.h., ca. 16)

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
(a) Berechnen Sie den Abstand der Gerade $\ell = \{(1,2,3,4) + t(8,6,4,2) : t \in \mathbb{R}\}$ von der Ebene $E = \{x(1,1,0,0) + y(0,1,1,1) - (1,1,1,1)\}$ in $\mathbb{R}^4$ bzgl. der euklidischen Metrik.
(b) Berechnen Sie den Durchmesser des Würfels $W \subset \mathbb{R}^5$ $W = \{(x_1, \dots, x_5) : 0 \leq x_j \leq 2$ für alle $j \in \{1, \dots, 5\}\}$

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Folge der Polynomialfunktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$: $f_0(z) = 1$, $f_1(z) = 1 + z^2$, $f_2(z) = 1 + z^2 + z^4, \dots, f_n(z) = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2n}$
(a) Bestimmen Sie die Grenzfunktion $g : U \to \mathbb{C}$, gegen die (f_n) punkweise konvergiert. Insbesondere ist der Definitionsbereich U explizit anzugeben.
(b) Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen g?
(c) Konvergiert (f_n) lokal gleichmäßig gegen g?
(d) Für welche $r \geq 0$ konvergiert (f_n) absolut gegen g bzgl. der Supremumsnorm $\| \|_{B_r(0)}$?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenregel alle lokalen Maxima und Minima von $f(x_1, x_2, x_3) = 8x_1 + x_2 - 4x_3$ auf dem Durschnitt M der Ebene $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ mit dem Ellipsoid $\{x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 = 1\}$.

Aufgabe 4. Es sei E ein Banachraum und $L : E \times E \to \mathbb{R}$ eine stetige bilineare Abbildung. In welchen Punkten $(x, y) \in E \times E$ ist L differentierbar? Bestimmen Sie gegebnfalls das totale Differential von L an der Stelle $(0, 0)$

Aufgabe 5. In den Polarkoordinaten (r, φ) auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \leq 0\}$ sei der Differentialoperator $L : C^\infty((0, \infty) \times (-\pi, \pi)) \to C^\infty((0, \infty) \times (-\pi, \pi))$

$$L := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

gegeben. Bestimmen Sie diesen Operator in den kartesischen Koordinaten x_1, x_2.

Aufgabe 6. Es seien $f_n : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen, die gegen die stetige Funktion $g : U \to \mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

(a) "$g : U \to \mathbb{C}$ ist holomorph."

(b) "Wenn für alle n f_n keine Nullstellen in U besitzen, so besitzt $g : U \to \mathbb{C}$ ebenfalls keine Nulstelle."