Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

PD Dr. R. Jakob 10.04.14

Gewöhnliche Differentialgleichungen
SS 2014
1.Übung

AUFGABE 1:

1) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$y' = Ly$$

für ein beliebiges, festes $L \in \mathbb{R}$ nur die Lösungen $y(t) = \alpha\, e^{Lt}$, für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, haben kann. Wieviele Lösungen muss somit das AWP

$$y' = Ly, \qquad y(0) = y_0$$

für einen beliebigen Startwert $y_0 \in \mathbb{R}$ haben ? Wie lauten diese Lösungen konkret ?

Hinweis: Nehmen Sie an, es existierte eine Lösung y von $y' = Ly$ und betrachten Sie dann die Funktion $\phi(t) := e^{-Lt} y(t)$.

2) Beweisen Sie, dass alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + ky = 0$$

für konstantes $k > 0$ durch $y(t) = c\,\sin(\sqrt{k}\,t + p)$, oder äquivalent dazu, durch $y(t) = c_1\,\sin(\sqrt{k}\,t) + c_2\,\cos(\sqrt{k}\,t)$ gegeben sind, für $c, c_1, c_2, p \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Differenzieren Sie $(y')^2$, beachten Sie dabei die Kettenregel und setzen Sie dann $y'' = -ky$. Anschliessend überlegen Sie sich, ob es Ihnen nützen könnte, die Stammfunktion von $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ exakt angeben zu können und deren Verkettung mit einem bestimmten Vielfachen von y abzuleiten.

3)* Sind $y(t) = c\,\sinh(\sqrt{-k}\,t + p)$ oder $y(t) = c\,\cosh(\sqrt{-k}\,t + p)$ oder auch $y(t) = c_1\,e^{(\sqrt{-k}\,t)} + c_2\,e^{(-\sqrt{-k}\,t)}$ für $c, c_1, c_2, p \in \mathbb{R}$, Lösungen von $y'' + ky = 0$, falls $k < 0$ gilt ? Überlegen Sie sich weiterhin, ob Sie jede Funktion der Form $y(t) = c_1\,e^{(\sqrt{-k}\,t)} + c_2\,e^{(-\sqrt{-k}\,t)}$, für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, in der Form $y(t) = c\,\sinh(\sqrt{-k}\,t + p)$ [oder $y(t) = c\,\cosh(\sqrt{-k}\,t + p)$] bei geeigneter Wahl von $c, p \in \mathbb{R}$ darstellen können.

Hinweis: Die Additionstheoreme für sin und sinh lauten formal gleich, nämlich $\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2)$ und $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2)$, und doch gibt es hierbei einen „empfindlichen, qualitativen Unterschied" !

AUFGABE 2:

1) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f(x) := \sqrt{\mid x \mid}$ und $g(x) :=\mid x \mid^{2/3}$ nicht lokal Lipschitz-stetig um 0 sind, d.h. dass kein $\epsilon > 0$ existieren kann, sodass

$$\mid f(x_1) - f(x_2) \mid \leq L_\epsilon \mid x_1 - x_2 \mid \qquad \text{bzw.} \qquad \mid g(x_1) - g(x_2) \mid \leq L_\epsilon \mid x_1 - x_2 \mid$$

für alle $x_1, x_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ und für eine hinreichend grosse reelle Zahl $L_\epsilon \geq 0$ gilt.

2) Haben die AWPs

$$y' = 2 \mid y \mid^{1/2}, \qquad y(0) = 0, \qquad \text{und} \qquad y' = 3 \mid y \mid^{2/3}, \qquad y(0) = 0,$$

nur die triviale Lösung $y \equiv 0$? Oder gibt es noch weitere, interessantere Lösungen ?

AUFGABE 3:

1) Begründen Sie, warum eine Funktion x mit positiven Werten genau dann das AWP

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^p(t), \qquad x(0) = x_0 > 0$$

für $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$, löst, wenn die Funktion $y(t) := x(t)^{1-p}$ das AWP

$$y'(t) = (1-p)a(t)y(t) + (1-p)b(t), \qquad y(0) = x_0^{1-p} > 0$$

löst.

2) Verwenden Sie diesen Trick für $p = 2$, um die (eindeutige) Lösung des „logistischen AWP's"

$$x'(t) = k\,x(t) - \beta x^2(t), \qquad x(0) = x_0 > 0, \tag{1}$$

für Konstanten $k, \beta > 0$, zu berechnen. Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$? Wächst oder fällt diese Lösung monoton, wenn wir entweder $0 < x_0 < \xi := k/\beta$ oder $x_0 > \xi := k/\beta$ voraussetzen ? Und wie verhält sich die Lösung x gerade im Falle $x_0 = \xi$? Welche anschauliche Bedeutung hat somit dieser Quotient $\xi := k/\beta$ für die Lösung des AWP's (1) ?

Abgabetermin ist Donnerstag, 17.04.2014.